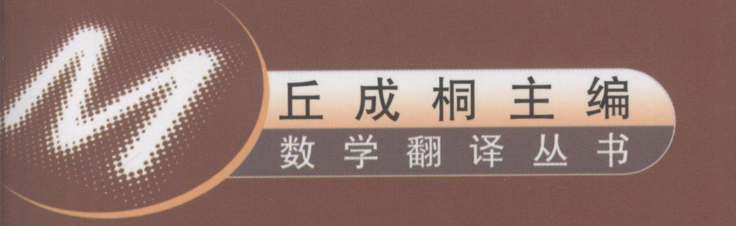


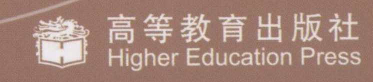
CAMBRIDGE

完备开曲面上全曲率的几何

The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces

Katsuhiro Shiohama · Takashi Shioya · Minoru Tanaka 著

许洪伟 叶 斐 译





完备开曲面上全曲率的几何

The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces

■ Katsuhiro Shiohama · Takashi Shioya · Minoru Tanaka 著
■ 许洪伟　叶　斐　译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01–2007–5689 号

The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces ISBN: 978-0-521-45054-6, by Katsuhiro Shiohama, Takashi Shioya, Minoru Tanaka, first published by Cambridge University Press 2003.

图书在版编目(CIP)数据

完备开曲面上全曲率的几何/(日)盐滨胜博,(日)盐谷隆,(日)田中实著;许洪伟,叶斐译. —北京: 高等教育出版社,2009. 11
(数学翻译丛书/丘成桐主编)
ISBN 978-7-04-027489-9

Ⅰ. 完… Ⅱ. ①盐…②盐…③田…④许…⑤叶…
Ⅲ. 常曲率空间 Ⅳ. O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162227 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2009 年 11 月第 1 版
印　　张	16	印　　次	2009 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	定　　价	42.00 元

物料号　27489-00

译者序

本书系统介绍了如何运用现代微分几何中的一些思想来处理和拓展积分几何中的经典结果，是一本极富特色的微分几何著作。作者以测地线及相关理论为基本工具深入系统地介绍了完备非紧致曲面的全曲率几何，其中许多漂亮的几何定理是第一次见诸书本。这里很多结果可以推广到更一般的几何空间中。

作者盐滨胜博教授、盐谷隆教授和田中实教授都是长期从事黎曼流形的曲率和拓扑研究的日本著名微分几何学家，书中的很多重要内容是他们多年辛勤研究的结晶。1994—1995 年，译者之一的许洪伟教授在日本九州大学数学系从事访问研究工作，有机会结识本书的三位作者，并了解到当时这本书的写作进展和书中部分有趣的结果。时隔多年，我们有幸将其翻译成中文，希望国内广大读者能从中受益。

承蒙浙江大学数学科学研究中心赵恩涛、顾娟如等同志对本书翻译稿作了仔细校对，我们在此表示衷心感谢。

译　者

2009 年 4 月

前言

黎曼流形的曲率和拓扑是微分几何研究的核心内容。对这一领域的许多重要贡献可以追溯到 1935—1936 年 Cohn-Vossen 在 [19] 和 [20] 中的开创性工作。事实上，他对完备非紧致黎曼流形全曲率的研究包含了极为丰富的思想。他的想法启示着我们去研究黎曼流形的曲率和拓扑。

著名的 Gauss-Bonnet 定理指出紧致 2 维黎曼流形的全曲率是拓扑不变量。Cohn-Vossen 首先证明了有限单连通完备非紧致 2 维黎曼流形 M 的全曲率有上界 $2\pi\chi(M)$，其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数。这一结果的许多精彩推论，其中之一是他证明了存在一条直线具有非负 Gauss 曲率的完备开 2 维黎曼流形的分裂定理。他也对这类流形建立了结构定理。他研究了这些 2 维流形上完备测地线的整体性态，并推动了极点的研究。对于存在全曲率的完备开曲面的 Bonnesen 型等周问题，其解析解情形首先由 Fiala [26] 做了研究，而 C^2 的情形则由 Hartman [34] 做了研究。这里 Cohn-Vossen 定理扮演了重要角色。无限连通完备开曲面的全曲率首先由 Huber 从复分析的观点进行了研究。Busemann 考虑了一个 G-曲面 X 上全曲率的概念，并指出用 X 的 Busemann 全超出数取代全曲率时，Cohn-Vossen 的结果应归结为 Busemann G-曲面。

将 Cohn-Vossen 的结果推广到高维情形用了三十多年的时间。它们是 Toponogov 分裂定理 [103]，具有正截曲率的完备非紧黎曼流形的结构定理 [30]，以及具有非负截曲率的完备非紧黎曼流形的结构定理 [17]。而 [69] 则讨论了具有非负截曲率的高维完备非紧黎曼流形的全曲率。

本书的目的在于研究完备非紧 2 维黎曼流形的全曲率的几何性质。对于这样的流形 M，其全曲率 $c(M)$ 不是拓扑不变量，而是依赖于黎曼度量的选取。因

此, 我们可以考虑 $c(M)$ 所描述的 M 的某些几何性质。这些现象可以从 M 的射线质量的渐近性态看出, 也可以从度量球及其边界上的等周不等式看出。并且, 具有 Tits 度量的理想边界的大小可以由 $c(M)$ 和 M 的拓扑确定。黎曼平面的完备测地线的整体性态可以由 $c(M)$ 来控制。许多结果希望可以推广到带有 Busemann 全余量的完备非紧 Alexandrov 曲面上。

本书作为一本自编的讲义, 加入了许多例子、插图和练习。对一年级的研究生很有帮助, 读者可以快速地掌握研究黎曼几何所必需的工具。

本书的第一章介绍黎曼几何的预备知识。我们首先应用局部标架, 介绍了 Levi-Civita 联络和曲率张量, 然后应用向量场的概念对此进行简化。我们要感谢两本书, 它们对本书的编写非常有用: 第一章 §4 ~ §7 的讨论基于 Gromoll、Klingenberg 和 Meyer 的书 [29]; 关于 Sasaki 度量的讨论基于 Sakai 的书 [73]。

第二章介绍 Cohn-Vossen 和 Huber 关于完备开曲面全曲率的经典结果。Cohn-Vossen 在 [19] 和 [20] 中的所有想法在这里都做了解释。我们讨论曲面上的紧致单纯复形的 Gauss-Bonnet 定理的方法, 用相同的方法将 Gauss-Bonnet 定理推广到这类曲面上。

第三章指出具有全曲率的完备非紧致 2 维黎曼流形 M 的理想边界 $M(\infty)$ 可以通过 Ballmann、Gromov 和 Schroeder 在 [7] 中的方法得到, 其中的讨论用到了 Hadamard 流形。我们通过附加一个具有 Tits 度量的理想边界来建立 M 的紧化 $M \cup M(\infty)$ 的 Gauss-Bonnet 定理。本章还对一些所围区域的全曲率比较小的特殊三角形给出了三角比较定理。进而, 我们证明了具有有限全曲率的流形 M 的数乘极限是由 $M(\infty)$ 生成的具有公共顶点的平坦锥的集合, 并讨论了 Busemann 函数的性态。

第四章讨论了带有 (或不带有) 全曲率的完备开曲面上圆的割迹的结构, 介绍了测地平行圆上的经典 Hartman 定理, 并详细讨论了度量圆上的拓扑结构。

第五章讨论了度量圆和光滑 Jordan 圆周围球体上的等周不等式, 推广了经典的 Fiala-Hartman 定理, 并考虑了无限连通的情形。

第六章讨论了由 M 上一点出发的射线的质量, 并通过等周不等式讨论了射线质量的积分公式。

第七章给出了 von Mangoldt 的经典结果。同胚于平面的旋转曲面上极点的集合可以具体地描述出来: 它或者由唯一的平凡极点组成, 或者构成一个球心在顶点的闭球体。我们给出了一个旋转曲面具有多个极点的充分必要条件。规范旋转曲面 (如双叶双曲面) 的割迹也可以具体地确定下来。

第八章讨论了具有全曲率的黎曼平面 M 上完备测地线的整体性态。在一个紧致集 (靠近理想边界) 之外的完备测地线自交的个数可通过 M 的全曲率进行显式估计。这涉及曲线的 Whitney 正则同伦和旋转数。

作者要感谢 Takao Yamaguchi, Kunio Sugahara, Qing Ming Cheng, Kazuyuki Enomoto 和 Yoshiko Kubo, 他们阅读了初稿并提出了修改意见。同时感谢 Manabu Ohura 承担了初稿录入工作。

郑重声明

策划编辑　王丽萍
责任编辑　李华英
封面设计　王凌波
责任绘图　吴文信
版式设计　马敬茹
责任校对　金　辉
责任印制　张泽业

目录

第一章 黎曼几何

本章介绍黎曼几何的基础工具. 在此我们假设读者已经掌握了流形的基本知识. 除非特别说明, 本章只讨论光滑流形. 局部标架的使用将为初学者带来方便. 张量运算用来介绍测地线、平行性、共变微分和黎曼曲率张量. 在 §1.1 至 §1.3 中, 除非特别说明, 将使用 Einstein 约定. 尽管如此, 这并不能方便进一步的讨论, 例如二阶变分公式或 Jacobi 场. 为了避免混淆, 我们将使用向量场和联络形式来讨论关于 Jaboci 场和共轭点的问题.

§1 黎曼度量

假设 M 是 n 维连通光滑流形, (U,x) 是点 $p\in M$ 附近的局部标架. 点 $q\in U$ 满足 $x(q)=(x^1(q),\cdots,x^n(q))\in x(U)\subset\mathbb{R}^n$. M 在 p 点的切空间记作 T_pM 或 M_p, $TM:=\bigcup\limits_{p\in M}T_pM$ 表示 M 的切丛. 记 $\pi:TM\to M$ 表示投影映射. 设 $\mathcal{X}(M)$ 和 $\mathcal{X}(U)$ 分别表示 M 和 U 上的光滑向量场空间, $C^\infty(M)$ 表示 M 上的光滑函数空间. 一个正定光滑对称双线性形式 $g:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ 定义了 M 上的一个黎曼度量. 度量 g 在 (U,x) 作如下的局部表示. 设 $X_i\in\mathcal{X}(U)$ 表示与第 i 条坐标曲线相切的第 i 个基向量场, 即 $X_i:=\mathrm{d}(x^{-1})(\partial/\partial x^i)$, 其中 $\partial/\partial x^i$ 是 $x(U)\subset\mathbb{R}^n$ 中平行于 $\mathbb{R}^n$ 的第 i 条坐标轴的典型向量场. 对每个 $q\in U$,T_qM 由 $X_1(q),\cdots,X_n(q)$ 张成. 若 $X,Y:U\to TU$ 是局部向量场, 表示为 $X=\sum\limits_i\phi^iX_i, Y=\sum\limits_j\psi^jX_j$, 并且 $g_{ij}:=g(X_i,X_j)$, 则

$$g(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}\phi^i\psi^j g_{ij},\tag{1.1.1}$$

其中 $g_{ij}=g_{ji}$, g_{ij} 是 U 上的光滑函数. 因而向量 $v\in T_pM$ 的长度 (或范数) $\|v\|$ 定义为 $\|v\|:=g_p(v,v)^{1/2}=(\sum g_{ij}(p)v^iv^j)^{1/2}$, 其中 $v:=\sum v^iX_i(p)$. 在 T_pM 中两个向量 u 和 v 的夹角 $\angle(u,v)$ 定义为

$$\cos\angle(u,v):=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}.\tag{1.1.2}$$

这里夹角 $\angle(u,v)$ 取值于 $[0,\pi]$, $\langle u,v\rangle=g_p(u,v)$.

T_pM 中由 $X_1(p),\cdots,X_n(p)$ 张成的平行 n 维体的体积由 $|X_1(p)\wedge\cdots\wedge X_n(p)|=(\det g_{ij}(p))^{1/2}$ 给出. 因此 M 的体积元 $\mathrm{d}M$ 表示为

$$\mathrm{d}M=(\det g_{ij})^{1/2}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.\tag{1.1.3}$$

具有黎曼度量 g 的流形 M 称为黎曼流形, 记为 (M,g), 或简记为 M.

光滑曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 通常指存在一个开区间 $I\supset[\alpha,\beta]$, 使得 c 定义在 I 上, 并且在 I 上所有的点都是正则的. 分段光滑曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 是由有限多条光滑曲线构成的连续映射, 即存在有限多个点 $t_0=\alpha<t_1<\cdots<t_k=\beta$, 使得 $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 对每个 $i=0,1,\cdots,k-1$ 都是光滑曲线. 沿曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 的分段光滑的向量场 X 定义为分段光滑映射 $X:[\alpha,\beta]\longrightarrow T_cM$, 使得 $\pi\circ X(t)=c(t)$ 对所有的 $t\in[\alpha,\beta]$ 成立, 其中 $T_cM:=\bigcup_{t\in[\alpha,\beta]}T_{c(t)}M$. 曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$ 在局部坐标邻域中表示为 $x\circ c(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t)),t\in[\alpha,\beta]$. 它的速度向量场定义为

$$\dot{c}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}X_i\circ c(t).$$

曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$ 的长度 $L(c)$ 定义为

$$L(c)=\int_\alpha^\beta\|\dot{c}\|\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(c(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t.\tag{1.1.4}$$

若对 $t\in[\alpha,\beta]$, $s(t)$ 是 c 的子弧 $c|_{[\alpha,t]}$ 的长度, 则 $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t=\|\dot{c}(t)\|>0$. 因此 $s(t)$ 具有反函数 $t=t(s)$. 于是 c 可由它的弧长 $s\in[0,L]$ 进行参数表示, 其中 $L=L(c)$ 是 c 的总长度. 由关系式 $\mathrm{d}s(t)=\|\dot{c}\|\,\mathrm{d}t$ 可以得到二阶微分形式

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

称之为 M 的线素.

§2 测 地 线

本节开始使用 Einstein 约定. 建立了 M 中曲线的长度之后, 我们来讨论一类具有特殊性质的曲线: 在端点相同的所有曲线中具有局部最小长度的曲线. 这可以视为局部最小性质. 这样的曲线即为测地线, 可以通过求解一个非线性二阶常微分方程, 即下面的 (1.2.1) 式得到, 其系数仅依赖于 g_{ij} 及其偏微分. 因此测地线可以定义为 (1.2.1) 式的解. 具有固定起始点 p 的所有解的集合与 T_pM 中一个关于原点的星形区域相对应. 因此在这里介绍这一点处的指数映射和单射半径.

定义 1.2.1 一条单位速度曲线 (即弧长参数曲线) $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 称为具有局部极小性质, 当且仅当对每个 $s\in[\alpha,\beta]$, 存在一个满足 $[s-\delta,s+\delta]\subset I$ 的正数 δ 和 $c([s-\delta,s+\delta])$ 的邻域 $\mathcal{N}$, 使得在 $\mathcal{N}$ 中连接 $c(s-\delta)$ 和 $c(s+\delta)$ 的所有曲线中, $c([s-\delta,s+\delta])$ 的长度最短.

定义 *Christoffel* 符号

$$\Gamma^i_{jk}:=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{lk}+\partial_k g_{jl}-\partial_l g_{jk}),$$

其中 $\partial_j g_{lk}:=\partial g_{lk}/\partial x^j$, (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵, 即

$$g^{il}g_{lk}=\delta^i_k.$$

这里 δ^i_j 是 *Kronecker* δ, 即

$$\delta^i_k=\begin{cases}1, & i=k;\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

据此我们证明

定理 1.2.1 若单位速度曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 具有局部极小性质, 则 c 在坐标邻域 U 的局部表示

$$x\circ c(s)=(x^1(s),\cdots,x^n(s))$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0. \tag{1.2.1}$$

证明 由于只在局部进行讨论, 因此可以只讨论 $c([\alpha,\beta])$ 完全包含于坐标邻域 U 的情形. 记 $x\circ c(s)=(x^1(s),\cdots,x^n(s))$. 沿 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$ 的变分定义为 (分段光滑) 映射 $V:(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[\alpha,\beta]\longrightarrow U$, 使得对任意的 $s\in[\alpha,\beta]$, 有

$$V(0,s)=c(s),$$

并且 $V_\varepsilon := V(\varepsilon,s)$ 对每个 $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ 都是一条曲线 $V_\varepsilon:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$. 若对每个 $(\varepsilon,s)\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[\alpha,\beta]$ 有 $x\circ V(\varepsilon,s)=(x^1(\varepsilon,s),\cdots,x^n(\varepsilon,s))$, 则对应于 V 的变分向量场 $Y:[\alpha,\beta]\longrightarrow T_cM$ 可以表示为

$$Y(s)=\mathrm{d}V_{(0,s)}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial\varepsilon}(0,s)X_i\circ c(s).$$

每条变分曲线 V_ε 的长度 $L(\varepsilon)$ 定义为

$$L(\varepsilon):=L(V_\varepsilon)=\int_\alpha^\beta\sqrt{g_{ij}\frac{\partial x^i(\varepsilon,s)}{\partial s}\frac{\partial x^j(\varepsilon,s)}{\partial s}}\mathrm{d}s.$$

因此, 取弧长参数 $0\leqslant s\leqslant L=:L(c)$, 有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}&=\int_0^L\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left.\sqrt{g_{ij}\frac{\partial x^i(\varepsilon,s)}{\partial s}\frac{\partial x^j(\varepsilon,s)}{\partial s}}\right|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\int_0^L\left.\left((\partial_kg_{ij})\frac{\partial x^k}{\partial\varepsilon}\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial s}+2g_{ij}\frac{\partial^2x^i}{\partial s\partial\varepsilon}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)\right|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于积分中的第二项可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\varepsilon}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{kj}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\varepsilon},$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L(0)}{\mathrm{d}\varepsilon}=&\,g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\varepsilon}\frac{\partial x^j}{\partial s}(0,s)\Big|_0^L\\&-\int_0^L\left.\left(\partial_lg_{kj}\frac{\partial x^l}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial s}+g_{kj}\frac{\partial^2x^j}{\partial s^2}-\frac{1}{2}\partial_kg_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\varepsilon}\right|_{(0,s)}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令 $2[ij;k]:=\partial_ig_{jk}+\partial_jg_{ik}-\partial_kg_{ij}$, 则有 $\Gamma_{ij}^kg_{kl}=[ij;l]$, 并且以上积分可以重新表示为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}(\partial_lg_{kj}+\partial_jg_{kl}-\partial_kg_{lj})\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}+g_{kj}\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}s^2}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\varepsilon}\\=&\,g_{kj}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{lm}^j\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\varepsilon}.\end{aligned}$$

因此可以得到

$$L'(0)=g(\dot{c},Y)\mid_0^L-\int_0^Lg_{kj}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{lm}^j\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\right)Y^k\mathrm{d}s. \tag{1.2.2}$$

由 c 的局部极小化性质, 对所有 $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, 每个满足 $V(\varepsilon,0)=c(0)$ 和 $V(\varepsilon,L)=c(L)$ 的变分 V, 有 $L'(0)=0$. 因此由 $Y(0)=Y(L)=0$ 可得 $g(\dot{c},Y)\mid_0^L=0$. 由变分向量场 Y 的任意性可知结论成立. 证毕.

现在来讨论微分方程 (1.2.1). 变换参数 $s = at$, 其中 $a > 0$ 为常数, 则 (1.2.1) 变化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

测地线总可以用弧长的适当比例进行参数表示. 方程 (1.2.1) 等价于下面的一阶微分方程组

$$v^i(s) = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}s} + \Gamma^i_{jk}v^jv^k = 0. \tag{1.2.3}$$

由于 Γ^i_{jk} 是光滑函数, 以上微分方程组满足 Lipschitz 条件, 因此对于给定的初始条件, 方程具有唯一的解. 令 $p \in U$, $\xi \in T_pM$ 分别可以表示为 $x(p) = (p^1, \cdots, p^n)$, $\xi = \xi^iX_i(p)$. 则对于给定的初始条件 $x^i(0) = p^i$, $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s(0) = \xi^i$, $i = 1, \cdots, n$, 方程 (1.2.1) 具有唯一局部解. 若对于 $s \in [0, s_0), \gamma(s) := \gamma(p, \xi; s)$ 是满足 $\gamma(0) := \gamma(p, \xi; 0) = p$ 和 $\dot\gamma(0) = \xi$ 的 (1.2.1) 的最大解, 则 $\gamma(p, \xi; t) = \gamma(p, a\xi; t/a) = \gamma(p, t\xi; 1)$. 若令

$$\widetilde{M}_p := \Big\{u \in T_pM; \gamma(p, u; 1)\ \text{有意义}\Big\},$$

则 $\widetilde{M}_p$ 是 T_pM 中的区域, 并且是关于 T_pM 原点的星形区域.

定义 1.2.2 点 $p \in M$ 处的指数映射定义为在 $\widetilde{M}_p$ 上满足

$$\exp_p u := \gamma(p, u; 1)$$

的映射.

显然 $\exp_p$ 是光滑映射.

定理 1.2.2 存在原点附近的开集 $U_p \subset \widetilde{M}_p$, 使得 $\exp_p|_{U_p}: U_p \longrightarrow M$ 是一个嵌入. 特别地, 存在开集 $V_p \subset U_p$, 使得 $\exp_p V_p$ 中的任意两点可以由测地线连接.

证明 由定义可得 p 点的指数映射为

$$\mathrm{d}(\exp_p)\,|_o = E_n,$$

其中 E_n 是 $n \times n$ 的单位矩阵, $u = (u^1, \cdots, u^n)$. 因此在 T_pM 的原点附近可以找到满足条件的小邻域 U_p. 令 $\widetilde{TM} := \bigcup\limits_{p\in M} \widetilde{M}_p$, $\phi := (\pi, \exp) : \widetilde{TM} \longrightarrow M \times M$. 以上的讨论说明在每个零截面 $o \in \widetilde{TM}$,

$$\mathrm{d}\phi\big|_o = \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

因此可以找到零截面处的开集 $W \subset \widetilde{TM}$, 使得 $\phi\,|_W$ 是一个嵌入. 因此存在点 p 处的开集 $V_p \subset U_p$, 使得 $V_p \times V_p \subset \phi(W)$. 证毕.

引理 1.2.1 (Gauss 引理) 若 $u \in \widetilde{M_p}$, 且 $A \in T_uT_pM$ 正交于 u, 则

$$\langle \mathrm{d}(\exp_p)_u A, \mathrm{d}(\exp_p)_u u \rangle = 0.$$

证明 若 $\mathrm{d}(\exp_p)_u A = 0$ 则结论显然成立. 假设 $\mathrm{d}(\exp_p)_u A \neq 0$. 沿满足 $\gamma(0) = p,\ \dot{\gamma}(0) = u/\parallel u \parallel$, 并且 $l = \parallel u \parallel$ 的测地线 $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$, 选取测地变分 $V : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0, l] \longrightarrow M$, 使得

$$V(\varepsilon, t) := \exp_p t(u/\parallel u \parallel + \varepsilon A).$$

则对每个 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $V_\varepsilon : [0, l] \longrightarrow M$ 是长度为 $l\sqrt{1 + \varepsilon^2 \parallel A \parallel^2}$ 的测地线. 若 $Y(t) := \mathrm{d}V_{(0,t)}(\partial/\partial\varepsilon)$ 是关于 V 的变分向量场, 则 $Y(0) = 0,\ \ Y(l) = \mathrm{d}(\exp_p)_u A$, 由 (1.2.2) 式知

$$L'(0) = \langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \mid_0^l = 0.$$

证毕.

点 p 附近的测地极坐标系由嵌入映射 $\exp_p|_{U_p} : U_p \longrightarrow M$ 给出. 令 $B(0, r) := \{u \in \mathbb{R}^n; \parallel u \parallel < r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := \{u \in \mathbb{R}^n; \parallel u \parallel = 1\}$. 可以将它们自然的对应到 T_pM 中. 若 $(\theta^1, \cdots, \theta^{n-1})$ 是点 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 附近的局部坐标系, 则 $\exp_p|_{U_p}$ 可以局部表示为 $(\exp_p|_{U_p})^{-1}(q) = (r(q), \theta^1(q), \cdots, \theta^{n-1}(q)) \in U_p$. 记 $u^1 := r,\ u^2 := \theta^1, \cdots, u^n := \theta^{n-1}$, 由 Gauss 引理知度量 g 可以表示为

$$g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j = \mathrm{d}r^2 + h_{ab}\mathrm{d}\theta^a\mathrm{d}\theta^b, \tag{1.2.4}$$

其中 (h_{ab}) 是 $(n-1) \times (n-1)$ 阶正定矩阵.

定义 1.2.3 $\exp_p$ 在 p 点处的单射半径定义为

$$i(p) := \sup\{r > 0; \exp_p\big|_{B(0,r)} \text{ 是嵌入}\}.$$

引理 1.2.2 若 $r < i(p)$, 则 $\exp_p B(0, r)$ 中的每个点 q 可由唯一的测地线与点 p 相连接, 并且它是连接点 p 和点 q 的所有曲线中长度最短的. 特别地, 每条测地线都具有局部极小性质.

证明 由定理 1.2.2 可知, 在 $\exp_p B(0, i(p))$ 中存在唯一的连接点 p 和点 q 且长度为 $r(q)$ 的测地线. 令 $c : [0, 1] \longrightarrow \exp_p B(0, i(p))$ 是满足 $c(0) = p,\ c(1) = q$ 的一条 (逐段光滑) 曲线. 存在 c 的一个提升 $\psi : [0, 1] \longrightarrow B(0, i(p)) \subset T_pM$, 使得对所有 $t \in [0, 1]$, 有 $c(t) = \exp_p \circ \psi(t)$. 则这个提升可以表示为 $\psi(t) = (r(t), \theta^1(t), \cdots, \theta^{n-1}(t))$, 于是

$$\dot{c}(t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{\psi(t)}\dot{\psi}(t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{\psi(t)}\{\dot{r}\psi(t)/\parallel \psi \parallel + rA(t)\},$$

其中 $r(t)=\| \psi(t) \|$, $\psi(t)/\| \psi(t) \|=(\theta^1(t),\cdots,\theta^{n-1}(t))\in \mathbb{S}_p^{n-1}$, $A(t)$ 是 $\dot{\psi}(t)$ 在 $\psi(t)/\| \psi(t) \|$ 处关于 $\mathbb{S}_p^{n-1}$ 的切向分量. 则有

$$
\begin{aligned}
L(c) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \| \dot{c} \| \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \sqrt{\dot{r}^2 + h_{ab}\dot{\theta}^a\dot{\theta}^b}\mathrm{d}t \geqslant \int_\varepsilon^1 \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_0^1 \mathrm{d}r = r(q) - r(p) = r(q).
\end{aligned}
$$

考虑连接 p, q 且不包含于 $\exp_p B(0,i(p))$ 的 (分段光滑) 曲线 $c:[0,1]\longrightarrow M$. 则存在点 $c(t_0)$, 使得子弧 $c\mid_{[0,t_0)}$ 完全包含于 $\exp_p B(0,i(p))$. 上述讨论说明 $L(c\mid_{[0,t_0)})\geqslant i(p) > r(q)$, 这表明这样的曲线具有大于 $i(p)>r(q)$ 的长度. 证毕.

§3 黎曼曲率张量

牛顿第一定律指出, 在没有外力作用的情况下, 质点将维持匀速直线运动. 黎曼流形上的测地线可以类比于牛顿第一定律理解: 可以认为测地线的直性等价于存在沿该测地线的平行速度向量场. 由方程 (1.2.1) 出发, 这一想法使我们引出曲线平行场的概念.

引理 1.3.1 令 $Z(t)=\xi^i(t)X_i\circ\gamma(t)$ 为沿曲线 γ 的向量场, 其中 $\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ 包含在坐标邻域 U 中, 则映射

$$
t\mapsto \left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{kj}\xi^k\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)X_i\circ\gamma(t)
$$

不依赖于局部标架的选取, 因而是一个沿 γ 的向量场.

证明 设 (V,y) 是另一个局部标架, 且 $U\bigcap V$ 中包含了 γ 的一段子弧, 它可以表示为 $x\circ\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$, $y\circ\gamma(t)=(y^1(t),\cdots,y^n(t))$. 则在 $U\bigcap V$ 中线素 $\mathrm{d}s^2$ 可以表示为 $\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=h_{ab}\mathrm{d}y^a\mathrm{d}y^b$. 记 $(A^a_i)=(\partial y^a/\partial x^i)$ 为 Jacobi 矩阵, $(B^i_a)=(\partial x^i/\partial y^a)$ 为其逆矩阵. 显然 $Z(t)=\xi^iX_i\circ\gamma(t)=\eta^aY_a\circ\gamma(t)$, 其中 $\xi^i=B^i_a\eta^a$. 对 $g_{ij}=A^a_iA^b_jh_{ab}$ 关于 x^k 进行微分得

$$
\partial_k g_{ij} = A^a_iA^b_jA^c_k\frac{\partial h_{ab}}{\partial y^c} + \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k\partial x^i}A^b_j + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x^k\partial x^j}A^a_i\right)h_{ab}.
$$

又令

$$
\overline{\Gamma}^a_{bc} := \frac{1}{2}h^{ad}(\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{bd} - \partial_d h_{bc}),
$$

$$
\overline{[bc,a]} := h_{da}\overline{\Gamma}^d_{bc},
$$

则有

$$[ij,k] = A_i^b A_j^c A_k^a \overline{[bc,a]} + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^i \partial x^j} A_k^e h_{ed}.$$

可以证明

$$\Gamma_{jk}^i = A_j^b A_k^c B_a^i \overline{\Gamma}_{bc}^a + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j \partial x^k} B_d^i.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right) X_i \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_a^i \eta^a) + \left(A_j^b A_k^c B_a^i \overline{\Gamma}_{bc}^a + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j \partial x^k} B_d^i\right) \xi^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right\} A_i^e Y_e \\
&= \left\{\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^a \partial y^c} \frac{\mathrm{d}y^c}{\mathrm{d}t} \eta^a A_i^e + B_a^i \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t} A_i^e\right) + \eta^b \frac{\mathrm{d}y^c}{\mathrm{d}t} \delta_a^e \overline{\Gamma}_{bc}^a + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j \partial x^k} \delta_d^e B_a^j B_c^k \eta^a \frac{\mathrm{d}y^c}{\mathrm{d}t}\right\} Y_e \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}\eta^e}{\mathrm{d}t} + \eta^a \frac{\mathrm{d}y^c}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^a \partial y^c} A_i^e + \frac{\partial^2 y^e}{\partial x^j \partial x^k} B_a^j B_c^k + \overline{\Gamma}_{ac}^e\right)\right\} Y_e.
\end{aligned}$$

由

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^a}\left(\frac{\partial y^e}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^c}\right) = \frac{\partial^2 y^e}{\partial x^k \partial x^j} B_a^j B_c^k + A_k^e \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^c \partial y^a},$$

可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right) X_i \circ c(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\eta^e}{\mathrm{d}t} + \overline{\Gamma}_{bc}^e \eta^b \frac{\mathrm{d}y^c}{\mathrm{d}t}\right) Y_e \circ c(t).$$

证毕.

由以上的论证, 若 Z 是定义在点 p 邻域内的向量场, 且它在一个从 $p = c(0)$ 出发且具有给定初始切向量 $v = \dot{c}(0) \in M_p$ 的曲线 c 上的限制可以表示为 $Z \circ c(t) = \xi^i(t) X_i \circ c(t)$, 则向量 $(\mathrm{d}\xi^i/\mathrm{d}t + \Gamma_{jk}^i \xi^j \mathrm{d}x^k/\mathrm{d}t) X_i(p)$ 不依赖于 c 的选取, 而只依赖于 v 和 Z. 记

$$\nabla_v Z := \left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right) X_i(p), \tag{1.3.1}$$

称 $\nabla_v Z$ 为 Z 在 v 的共变导数.

共变导数也定义了如下的映射 $\nabla : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)$: 若 $Y, Z \in \mathcal{X}(U)$, 则向量场 $\nabla_Y Z \in \mathcal{X}(U)$ 可通过令 $Y = \phi^i X_i$, $Z = \psi^i X_i$ 得到

$$\nabla_Y Z := \phi^i \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \psi^j\right) X_k.$$

练习 1.3.1 证明向量场的共变导数具有如下性质: 若 $Y, Z : U \longrightarrow TU$, α, β 是 U 上的函数, 则

$$\begin{cases} \nabla_{\alpha Y} Z = \alpha \nabla_Y Z, \\ \nabla_Y(\beta Z) = Y(\beta) Z + \beta \nabla_Y Z, \\ Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

因此 $[X, Y]$ 是由 $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$ 定义的向量场, 其中 f 为光滑函数.

沿单位速度曲线 $c : [0, l] \longrightarrow U$ 的向量场 $Z : [0, l] \longrightarrow T_c M$ 称为平行的当且仅当 $\nabla_{\dot{c}} Z = 0$. c 在 $c(s)$ 处的测地曲率向量 $\boldsymbol{k}(s)$ 定义为

$$\boldsymbol{k}(s) := \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} \right) X_i \circ c(s),$$

其中 s 是 c 的弧长参数. c 的测地曲率 $\kappa(s)$ 定义为

$$\kappa(s) := \| \boldsymbol{k}(s) \| .$$

注 1.3.1 单位速度测地线 c 上点 $c(s)$ 处的测地曲率向量 $\boldsymbol{k}(s)$ 具有如下性质: 对于充分小的 $h > 0$, 设 $\gamma_\pm : [0, a_\pm] \longrightarrow M$ 是满足 $\gamma_\pm(0) = c(s)$, $\gamma_\pm(a_\pm) = c(s \pm h)$ 的单位速度极小测地线, 记 $\tau : TM \longrightarrow T_{c(s)}M$ 是沿极小测地线在 $c(s)$ 处的平行变换, 则

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau \circ \dot{c}(s + h) - \dot{c}(s)}{h} = \boldsymbol{k}(s). \tag{1.3.3}$$

为了说明这一点, 我们定义由 $\xi_\pm(a_\pm) := \dot{c}(s \pm h)$ 生成的沿 $\gamma_\pm$ 的平行场 $\xi_\pm$. 若 $x \circ c(s) = (x^1(s), \cdots, x^n(s))$, $x \circ \gamma_\pm(t) = (x^1_\pm(t), \cdots, x^n_\pm(t))$, 并且对 $0 \leqslant t \leqslant a_\pm$ 有局部表示 $\xi_\pm(t) = \xi^i_\pm(a_\pm) X_i \circ \gamma_\pm(t)$, 则对某个 $\tilde{a}^i_\pm \in (0, a_\pm)$ 有

$$\xi^i_\pm(a_\pm) - \xi^i_\pm(0) = a_\pm \frac{\mathrm{d}\xi^i_\pm}{\mathrm{d}t}(\tilde{a}^i_\pm), \quad i = 1, \cdots, n.$$

(1.3.3) 式左边第 i 个分量可以表示为

$$\frac{1}{h}\left(\xi^i_\pm(0) - \frac{\mathrm{d}x^i(s)}{\mathrm{d}s} \right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\mathrm{d}x^i(s \pm h)}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}x^i(s)}{\mathrm{d}s} \right) + \frac{1}{h}\left(a_\pm \Gamma^i_{jk} \xi^j_\pm \frac{\mathrm{d}x^k_\pm}{\mathrm{d}t} \right).$$

取 $h \to 0$ 时的极限, 可知 $\dot{\gamma}_\pm(a_\pm)$ 收敛于 $\pm\dot{c}(s)$, 并且 $\lim\limits_{h \to 0}(a_\pm / h) = 1$. 这证明了 (1.3.3).

定理 1.3.1 若 Z 和 W 是沿曲线 c 的平行向量场, 则内积 $g(Z, W)$ 是常数. 特别地, 一条曲线是测地线当且仅当它是自平行的.

证明 记 $Z(s)=\xi^i(s)X_i\circ c(s)$, $W(s)=\eta^j(s)X_j(s)\circ c(s)$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g(Z,W)\circ c(s)&=\partial_k g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^j+g_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}s}\eta^j+\xi^i\frac{\mathrm{d}\eta^j}{\mathrm{d}s}\right)\\&=\partial_k g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\xi^i\eta^j-g_{ij}\left(\Gamma^i_{lm}\xi^l\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\eta^j+\Gamma^i_{lm}\eta^l\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\xi^j\right)\\&=\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\xi^i\xi^j\left(\partial_k g_{ij}-g_{pj}\Gamma^p_{ik}-g_{iq}\Gamma^q_{jk}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

余下的证明是显然的. 证毕.

现在定义 M 上的黎曼曲率算子. 令 $u,v,w\in T_pM$, 选取 p 点附近的局部坐标系 (U,x), 使得 $x(p)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的原点. 在 $x(U)$ 的原点处, 对充分小的 a,b, 考虑由 $a(\mathrm{d}x)_pu$ 和 $b(\mathrm{d}x)_pv$ 张成的平行四边形 P_{ab}. 令 $\tau_{ab}:T_pM\longrightarrow T_pM$ 为沿 $x^{-1}(P_{ab})$ 顺次通过 p_1,p_3,p_2 的平行移动, 其中 $x^{-1}(P_{ab})$ 在 p 处有角点, $p_1:=x^{-1}(au^1,\cdots,au^n)$, $p_2:=x^{-1}(bv^1,\cdots,bv^n)$, $p_3:=x^{-1}(au^1+bv^1,\cdots,au^n+bv^n)$. 若 $u:=u^iX_i(p)$, $v:=v^iX_i(p)$, $w:=w^iX_i(p)$, 则 $\tau_{ab}w-w$ 表示为 w_1-w_2, 其中 w_1 (或 w_2) 可由 w 沿着 $x^{-1}(P_{ab})$ 的从 p 到 p_3 且经过 p_1 (或 p_2) 的弧作平行移动得到. 由引理 1.3.1 中平行场的方程和 Taylor 展式, $\tau_{ab}w-w$ 的第 i 个分量表示为

$$\begin{aligned}(\tau_{ab}w-w)^i=\{&a(\Gamma^i_{jk}(p_2)-\Gamma^i_{jk}(p))u^k+b(\Gamma^i_{jl}(p)-\Gamma^i_{jl}(p_1))v^l\\&+ab(\Gamma^i_{ml}(p_1)\Gamma^m_{jk}(p)-\Gamma^i_{mk}(p_2)\Gamma^m_{jl}(p))u^kv^l\}w^j,\end{aligned}$$

其中省略了高阶项. 对上面关系式右边第一项应用平均值定理, 对 $a_i'\in(0,a)$ 和 $b_i'\in(0,b)$ 分别可以找到点 $p_1'=x^{-1}(a_i'(\mathrm{d}x)_pu)$ 和 $p_2'=x^{-1}(b_i'(\mathrm{d}x)_pv)$, 使得

$$\Gamma^i_{jk}(p_2)-\Gamma^i_{jk}(p)=b\partial_m\Gamma^i_{jk}(p_2')v^m$$

且

$$\Gamma^i_{jl}(p)-\Gamma^i_{jl}(p_1)=-a\partial_k\Gamma^i_{jl}(p_1')u^k.$$

因此, 记

$$R^i_{jkl}:=\partial_l\Gamma^i_{jk}-\partial_k\Gamma^i_{jl}+\Gamma^i_{al}\Gamma^a_{jk}-\Gamma^i_{ak}\Gamma^a_{jl},\tag{1.3.4}$$

则有

$$\lim_{a,b\to0}\frac{\tau_{ab}w-w}{ab}=-R^i_{jkl}u^lv^kw^jX_i(p).\tag{1.3.5}$$

由共变导数的定义, $\nabla_{X_i}X_j=\Gamma^k_{ij}X_k$, 因此

$$R^i_{jkl}X_i=\nabla_{X_l}\nabla_{X_k}X_j-\nabla_{X_k}\nabla_{X_l}X_j.$$

若 Z,V,W 是定义在坐标邻域 U 上的向量场, 满足 $Z(p)=u$, $V(p)=v$, $W(p)=w$, 则 R 定义了一个多线性映射 $R:\mathcal{X}(U)\times\mathcal{X}(U)\times\mathcal{X}(U)\longrightarrow\mathcal{X}(U)$, 使得

$$R(Z,V)W:=\nabla_Z\nabla_V W-\nabla_V\nabla_Z W-\nabla_{[Z,V]}W. \tag{1.3.6}$$

因此 $R(u,v)w=R(Z,V)W\mid_p=R^i_{jkl}u^l v^k w^j X_i(p)$ 不依赖于 p 附近的局部标架的选取. R 称为 M 的黎曼张量, 它在黎曼几何的研究中起着重要作用.

若 $\tau_{ba}:T_pM\longrightarrow T_pM$ 是沿 $x^{-1}(P_{ab})$ 的反方向的平行移动, 则 $\tau_{ab}^{-1}=\tau_{ba}$, 并且由 (1.3.5) 式可得 $R(u,v)w=-R(v,u)w$. 由 (1.3.4) 式可得 $R^i_{jkl}=-R^i_{jlk}$. R 的其他性质归结如下.

练习 1.3.2 证明黎曼曲率张量 R 满足如下性质. 若 $g_{im}R^m_{jkl}=R_{ijkl}$, 则

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}=&\frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ki}+\partial_k\partial_i g_{jl}-\partial_i\partial_l g_{jk}-\partial_j\partial_k g_{il})\\
&+g_{ab}(\Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{jl}-\Gamma^a_{il}\Gamma^b_{jk}),\\
&R_{ijkl}=-R_{ijlk}=-R_{jikl}=R_{klij},\\
&R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0,\\
&R_{ijkl}=\langle R(X_l,X_k)X_j,X_i\rangle.
\end{aligned}$$

例 1.3.1 ($\mathbb{R}^3$ 中旋转曲面的测地线) 对于光滑正值函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$, 定义关于轮廓曲线 $y=f(x)$ 的旋转曲面为 $M:=\{(f(u)\cos v,f(u)\sin v,u)\in\mathbb{R}^3;u\in\mathbb{R},0<v\leqslant 2\pi\}$. 记 $u^1:=u$, $u^2:=v$, 则有 $\mathrm{d}s^2=(1+(f')^2)(\mathrm{d}u^1)^2+f^2(\mathrm{d}u^2)^2$, 且

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{22}=\Gamma^2_{11}=0,$$
$$\Gamma^1_{11}=\frac{f'f''}{1+(f')^2},\ \Gamma^1_{22}=-\frac{ff'}{1+(f')^2},\ \Gamma^2_{12}=\frac{f'}{f}.$$

由计算得, $R^1_{212}=ff''/(1+(f')^2)^2$. 若 $\gamma(s):=(u(s),v(s))$ 是 M 上的单位速度测地线, 则

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2(1+(f')^2)+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 f^2=1, \tag{1.3.7}$$

并且 (1.2.1) 式可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+\dfrac{f'f''}{1+(f')^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2-\dfrac{ff'}{1+(f')^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}+2\dfrac{f'}{f}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=0.\end{cases} \tag{1.3.8}$$

由以上关系可知, 常值轮廓曲线 $v(s)$ 是测地线. 因此, 若对某个 s_0, $\dot\gamma(s_0)$ 不是切向量, 则 $\dot\gamma$ 不与任何轮廓曲线相切. (1.3.8) 中的第二个关系化简为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}f^2\right)=0,$$

因此 $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)f^2$ 是常数. 若 $\theta(s)$ 是过 $\gamma(s)$ 的轮廓曲线 $v=v(s)$ 与 $\dot{\gamma}(s)$ 的夹角, 则 $-\pi<\theta<\pi$ 且 $f\sin\theta(s)$ 是常数. 这就证明了

定理 1.3.2 (Clairaut 定理) 若 $\gamma(s)=(u(s),v(s))$ 是旋转曲面的测地线, 则过 $\gamma(s)$ 的轮廓曲线与 $\dot{\gamma}(s)$ 的夹角 $\theta(s)$ 满足

$$f(u(s))\sin\theta(s)=\text{常数}.$$

这一定理更一般的形式将在后面的定理 7.1.2 中给出.

例 1.3.2 (TM 上的 Sasaki 度量) 我们介绍 n 维黎曼流形 (M,g) 的切丛 TM 上的 Sasaki 度量. 令 (U,φ) 是局部坐标集. $\pi_M:TM\to M$ 为投影映射, 则 $\widetilde{U}:=\pi_M^{-1}(U)$ 是 TM 的局部坐标邻域, 并且坐标映射 $\psi:\widetilde{U}\to\mathbb{R}^{2n}$ 可如下表示. 对于点 $(p,u)\in\widetilde{U}$ 有 $\varphi(p)=(x^1(p),\cdots,x^n(p))$, $u=u^i(\partial/\partial x^i)(p)$, 因而 $\psi(p,u)=(x^1(p),\cdots,x^n(p),u^1,\cdots,u^n)\in\mathbb{R}^{2n}$.

在 $(p,u)\in\widetilde{U}$ 处 TM 的切空间 $T_{(p,u)}TM$ 包含 n 维线性子空间 T_uT_pM, 其中 T_uT_pM 是 T_pM 平行移动的自然对应, 由于对每个 $A\in T_uT_pM$, $\mathrm{d}(\pi_M)_{(p,u)}A=0$, 可知 $\mathrm{d}(\pi_M)_{(p,u)}$ 的核为 T_uT_pM. 核 T_uT_pM 称为 $T_{(p,u)}TM$ 在 (p,u) 处的垂直空间, 记为 V_u.

为找到 $T_{(p,u)}TM$ 中变换为 V_u 的向量, 取 $X\in T_pM$ 和与 X 相对应的曲线 $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$. 局部地我们记 $\varphi\circ c(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$, $c(0)=p$, $X=X^i(\partial/\partial x^i)(p)$. 令 $\xi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to TM$ 为由 $u=\xi(0)\in T_pM$ 生成的沿 c 的平行场. 则 $t\mapsto(c(t),\xi(t))$ 是 TM 中从 (p,u) 出发的曲线, 它在 $t=0$ 处的速度向量 v 可以表示为 $v=(x^i,u^i,X^i,\mathrm{d}\xi^i(0)/\mathrm{d}t)=(x^i,u^i,X^i,-\Gamma^i_{jk}X^j\xi^k)$. 这里 v 称作 X 在 (p,u) 的水平提升. 显然有 $\mathrm{d}(\pi_M)_{(p,u)}v=X$, 并且 T_pM 中所有向量水平提升的集合同构于 T_pM, 称作 $T_{(p,u)}TM$ 在 (p,u) 的水平提升空间, 记为 H_u. 于是有分解 $T_{(p,u)}TM=V_u\oplus H_u$.

若 $\alpha=X^i(\partial/\partial x^i)+Z^i(\partial/\partial u^i)\in T_{(p,u)}TM$, 则 α 在水平和垂直的分解 $\alpha=\alpha_h+\alpha_v$ 可由局部坐标表示为 $\alpha_h=(x^i,u^i,X^i,-\Gamma^i_{jk}u^jX^k)$ 和 $\alpha_v=(x^i,u^i,0,Z^i+\Gamma^i_{jk}u^jX^k)$. 连接映射 $K:TTM\longrightarrow TM$ 由 $K(\alpha):=(p,Z^i+\Gamma^i_{jk}u^jX^k)$ 定义. 则 $K|_{T_uT_pM}:T_uT_pM\longrightarrow T_pM$ 显然是同构, 于是 V_u 可以等同于 T_pM. 同样, 由 $\mathrm{d}(\pi_M)_{(p,u)}$, H_u 也可以等同于 T_pM.

利用这一分解, 可以引入 TM 上的 Sasaki 度量 G. 若 $\alpha,\beta\in T_{(p,u)}TM$, 则

$$G(\alpha,\beta):=g(\mathrm{d}(\pi_M)_{(p,u)}\alpha_h,\quad \mathrm{d}(\pi_M)_{(p,u)}\beta_h)+g(K(\alpha_v),K(\beta_v)).$$

通过 G 的限制, Sasaki 度量也可以定义在 M 上的单位球面丛 SM 上.

§4 第二基本形式

设 (M,g) 是 n 维黎曼流形, N 为 m 维光滑黎曼流形. 若 $f:N\longrightarrow M$ 是浸入映射, 则由 g 通过 f 诱导的黎曼度量 h 定义如下. 若 $X,Y\in\mathcal{X}(N)$, 则

$$h(X,Y):=g(\mathrm{d}f(X),\mathrm{d}f(Y)).$$

在每一点 $q\in N$ 处可得到一个 $(n-m)$ 维线性子空间 $T_qN^\perp\subset T_{f(q)}M$, 使得在 $T_{f(q)}M$ 中它关于 g 与 $\mathrm{d}f_q(T_qN)$ 正交. 于是有 N 上的 n 维向量丛 f^*TM 和 $(n-m)$ 维法丛 $TN^\perp$:

$$f^*TM:=\bigcup_{q\in N}T_{f(q)}M,\quad TN^\perp:=\bigcup_{q\in N}T_qN^\perp.$$

f^*TM 的正交分解为

$$f^*TM=\mathrm{d}f(TN)\oplus TN^\perp,$$

其中在局部化情况下 $\mathrm{d}f(TN)$ 往往可以等同于 TN. 由定义, 映射 $X:N\longrightarrow f^*TM$ 是沿 f 的向量场当且仅当 $\pi\circ X=f$. 映射 $\xi:N\longrightarrow TN^\perp$ 称为沿 f 的法向量场当且仅当 $\pi\circ\xi=f$. 记 $\mathcal{X}_f$ 和 $\mathcal{X}_f^\perp$ 分别为所有沿 f 的向量场空间和法向量场空间. 每个沿 f 的向量场 Y 具有唯一的分解 $Y=Y^\top+Y^\perp$, 其中 $Y^\perp\in\mathcal{X}_f^\perp$, $Y^\top$ 可视为由 $\mathrm{d}f(Y^\top)\equiv Y^\top$ 确定的 N 上的向量场.

N 和 M 的共变导数分别记作 D 和 ∇. 沿 f 的共变导数也记作 ∇, 其中 $\nabla:\mathcal{X}(N)\times\mathcal{X}_f\longrightarrow\mathcal{X}_f$. 对于点 $q\in N$ 和向量 $x,y\in T_qN$, 取 x,y 的 (局部) 场延拓 X,Y. 由 X 等同于 $\mathrm{d}f(X)$ 可知, Y 沿 f 关于 x 的共变导数表示为

$$\nabla_xY=(\nabla_xY)^\top+(\nabla_xY)^\perp.$$

这里的第一项等于

$$(\nabla_xY)^\top=(\nabla_x\mathrm{d}f(Y))^\top=\mathrm{d}f(D_xY),$$

第二项可以写为

$$B(X,Y)_q:=(\nabla_xY)^\perp=\nabla_xY-\mathrm{d}f(D_xY).\tag{1.4.1}$$

因此 $B:\mathcal{X}_f\times\mathcal{X}_f\longrightarrow\mathcal{X}_f^\perp$ 是对称双线性形式. 由 Christoffel 记号的对称性可以得出 B 的对称性.

沿 f 的法向量场 ξ 的沿 f 的共变导数的切向分量可以表示为

$$A_{\xi(q)}X=\nabla_x\xi-(\nabla_x\xi)^\perp.\tag{1.4.2}$$

$A_\xi: TN \longrightarrow TN$ 是线性的, 称为 f 的形状算子. A_ξ 的对称性是由于

$$g(B(X,Y),\xi) = -g(A_\xi X, Y) = -g(A_\xi Y, X). \tag{1.4.3}$$

(1.4.2) 式右边的法向分量诱导了沿 f 的法联络, 即 $\nabla^\perp: \mathcal{X}_f \times \mathcal{X}_f^\perp \longrightarrow \mathcal{X}_f^\perp$, 这由以下关系得到

$$\nabla_x^\perp \xi := \nabla_x \xi - A_{\xi(q)} X. \tag{1.4.4}$$

可以证明若 $\alpha, \beta \in C^\infty(N)$, 则 $\nabla_{\alpha X+\beta Y}^\perp \xi = \alpha \nabla_X^\perp \xi + \beta \nabla_Y^\perp \xi$, 且 $\nabla_X^\perp \alpha\xi = X(\alpha)\xi + \alpha \nabla_X^\perp \xi$.

设 R 和 S 分别是 M 和 N 的黎曼曲率张量, 通过 (1.4.1) 式将 $X, Y, Z \in \mathcal{X}(N)$ 等同于沿 f 的向量场, 则由 (1.3.6) 式得

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \nabla_X (D_Y Z + B(Y,Z)) - \nabla_Y (D_X Z + B(X,Z)) \\
&\quad -(D_{[X,Y]} Z + B([X,Y],Z)) \\
&= S(X,Y)Z + B(X, D_Y Z) + A_{B(Y,Z)} X + \nabla_X^\perp B(Y,Z) \\
&\quad -B(Y, D_X Z) - A_{B(X,Z)} Y - \nabla_Y^\perp B(X,Z) - B([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

若令 $R(X,Y)Z = R(X,Y)Z^\top + R(X,Y)Z^\perp$, 则 Gauss 方程与 Codazzi 方程由下面得到

$$\begin{cases}
R(X,Y)Z^\top = \mathrm{d}f(S(X,Y)Z) + A_{B(Y,Z)}X - A_{B(X,Z)}Y, \\
R(X,Y)Z^\perp = B(X, D_Y Z) - B(Y, D_X Z) - B([X,Y],Z) \\
\qquad\qquad\quad +\nabla_X^\perp B(Y,Z) - \nabla_Y^\perp B(X,Z).
\end{cases} \tag{1.4.5}$$

对法向量场 $\xi: N \longrightarrow TN^\perp$, 有

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]} \xi \\
&= \nabla_X (A_\xi Y + \nabla_Y^\perp \xi) - \nabla_Y (A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi) \\
&\quad -(A_\xi [X,Y] + \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi) \\
&= D_X A_\xi Y + B(X, A_\xi Y) + (A_{\nabla_Y^\perp \xi} X + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi) \\
&\quad -(D_Y A_\xi X + B(Y, A_\xi X) + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi) \\
&\quad -A_\xi [X,Y] - \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi.
\end{aligned}$$

若 $R(X,Y)\xi = R(X,Y)\xi^\top + R(X,Y)\xi^\perp$ 为正交分解, 则

$$R(X,Y)\xi^\top = \mathrm{d}f(D_X A_\xi Y - D_Y A_\xi X) - A_\xi [X,Y] + A_{\nabla_Y^\perp \xi} X - A_{\nabla_X^\perp \xi} Y, \tag{1.4.6}$$

$$R(X,Y)\xi^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + B(X, A_{\xi}Y) - B(Y, A_{\xi}X). \tag{1.4.7}$$

这里 $R^{\perp}$ 为法联络 $\nabla^{\perp}$ 的曲率算子, 由

$$R^{\perp}(X,Y)\xi := \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi \tag{1.4.8}$$

给出, 注意到 (1.4.4) 式与 (1.4.6) 式等价, (1.4.8) 式称为 Ricci 方程.

定义 1.4.1 设 $\sigma = \sigma(X,Y)$ 是由 X 和 Y 张成的截平面, M 关于 σ 的截取率 $K_M(X,Y)$ 定义为

$$K_{\sigma(X,Y)} = K_M(X,Y) := \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

同样, $p \in M$ 处向量 X 的 Ricci 曲率 $Ric_M(X)$ 可如下定义, 令 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 T_pM 的正交基, 满足 $X/\parallel X\parallel = e_n$, 则

$$Ric_M(X) := \sum_{i=1}^{n-1} K_M(e_i, e_n).$$

进而, 若 $\dim M = 2$, 则截曲率称为 Gauss 曲率, 记为 G.

由 Gauss 方程 (1.4.5) 得

$$\langle S(X,Y)Y, X\rangle = \langle R(X,Y)Y, X\rangle + B(X,X)B(Y,Y) - B(X,Y)^2.$$

若 K_N 和 K_M 分别为 N 和 M 的截曲率, 则由以上关系式可得

$$K_N(X,Y) = K_M(X,Y) + \frac{B(X,X)B(Y,Y) - B(X,Y)^2}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}. \tag{1.4.9}$$

§5 第二变分公式与 Jacobi 场

在本章 §2 的讨论中, 我们得到具有局部极小化性质的曲线是测地线. 现在考虑对于测地线 $\gamma : [0,l] \longrightarrow M$, 在 γ 附近具有相同端点的曲线中, γ 是否具有极小化性质. 为此我们给出第二变分公式. 一个对称的双线性形式可以通过黎曼曲率张量定义在沿 γ 的向量场空间上, 称作 γ 的指标形式. 第二变分公式由指标形式表示. 沿 γ 的 Jacobi 场是属于指标形式核的向量场, 它是二阶线性微分方程的解. 我们将证明在 M 中每一点附近凸球的存在性. 这里我们使用沿着映射的共变微分.

设 $V : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0,l] \longrightarrow M$ 是沿单位速度测地线 $\gamma : [0,l] \longrightarrow M$ 的变分. 对于 $\mathbb{R}^2$ 的基向量场 $\partial/\partial\varepsilon$ 和 $\partial/\partial s$, 沿 V 的共变微分为

$$\nabla_{\partial/\partial\varepsilon} = \nabla_{\mathrm{d}V(\partial/\partial\varepsilon)}, \quad \nabla_{\partial/\partial s} = \nabla_{\mathrm{d}V(\partial/\partial s)}.$$

特别地, 有以下的重要关系式:

$$\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}\mathrm{d}V\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=\nabla_{\partial/\partial s}\mathrm{d}V\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right).$$

记

$$T(\varepsilon,s):=\mathrm{d}V_{(\varepsilon,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),\quad Y(\varepsilon,s):=\mathrm{d}V_{(\varepsilon,s)}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)$$

分别是与 V 相对应的 V_ε 的速度向量和变分向量场. V_ε 的长度为

$$L(\varepsilon)=\int_0^l\|T(\varepsilon,s)\|\,\mathrm{d}s.$$

定理 1.5.1 设 $V:(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[0,l]\longrightarrow M$ 是沿单位速度测地线 $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$ 的变分. 则有第一变分公式

$$L'(0)=\langle Y,T\rangle(0,s)\mid_0^l.$$

若 $Y_\perp=Y-\langle Y,T\rangle T$, 则有第二变分公式

$$\begin{aligned}L''(0)=&\int_0^l\left(\langle\nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp,\nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp\rangle-\langle R(Y_\perp,\dot\gamma)\dot\gamma,Y_\perp\rangle\right)(0,s)\mathrm{d}s\\&+\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}Y_\perp,T\rangle(0,s)\mid_0^l.\end{aligned}$$

特别地, 若 V 是恰当的, 即对所有的 ε, $V(\varepsilon,0)=\gamma(0)$ 且 $V(\varepsilon,l)=\gamma(l)$, 则

$$L''(0)=\int_0^l\left(\langle\nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp,\nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp\rangle-\langle R(Y_\perp,\dot\gamma)\dot\gamma,Y_\perp\rangle\right)(0,s)\mathrm{d}s.$$

证明 我们只需证明第二变分公式. 由

$$L'(\varepsilon)=\int_0^l\frac{\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}T,T\rangle(\varepsilon,s)}{\|T(\varepsilon,s)\|}\mathrm{d}s$$

可得

$$L''(\varepsilon)=\int_0^l\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}T,T\rangle(\varepsilon,s)}{\|T(\varepsilon,s)\|}\right)\mathrm{d}s.$$

由于 $\partial/\partial\varepsilon$ 和 $\partial/\partial s$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的基向量场, 故

$$\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}T=\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}\left(\mathrm{d}V\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)=\nabla_{\partial/\partial s}\left(\mathrm{d}V\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\right)=\nabla_{\partial/\partial s}Y=Y',$$

$L''(\varepsilon)$ 的被积项可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\langle\nabla_{\partial/\partial s}T,T\rangle}{\|T\|}\right)&=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\langle\nabla_{\partial/\partial s}Y,T\rangle}{\|T\|}\right)\\&=\frac{\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}\nabla_{\partial/\partial s}Y,T\rangle+\langle\nabla_{\partial/\partial s}Y,\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}T\rangle}{\|T\|}\\&\quad-\frac{\langle\nabla_{\partial/\partial s}Y,T\rangle^2}{\|T\|^3}.\end{aligned}$$

将 $R(T,Y)Y = \nabla_T\nabla_Y Y - \nabla_Y\nabla_T Y$ 和 $\| T(0,s) \| = 1$ 代入上式得

$$L''(0) = \int_0^l (\langle -R(T,Y)Y + \nabla_T\nabla_Y Y, T\rangle + \langle \nabla_T Y, \nabla_Y T\rangle \\ -\langle \nabla_T Y, T\rangle^2)(0,s)\mathrm{d}s.$$

由 R 的反对称性知

$$\langle R(T,Y)Y,T\rangle = \langle R(T,Y_\perp)Y_\perp, T\rangle.$$

同样可得 $\langle \nabla_T\nabla_Y Y, T\rangle = T\langle \nabla_Y Y, T\rangle - \langle \nabla_Y Y, \nabla_T T\rangle$. 令 $\varepsilon = 0$, 则

$$\langle \nabla_T\nabla_Y Y, T\rangle(0,s) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}s)\langle \nabla_Y Y, T\rangle(0,s).$$

最后由 $Y(0,s) = \{Y_\perp + \langle Y,T\rangle T\}(0,s)$ 知以下关系式在 $(s,0)$ 处成立:

$$\begin{aligned}\nabla_T Y &= \nabla_T Y_\perp + (T\langle Y,T\rangle)T + \langle Y,T\rangle\nabla_T T \\ &= \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle Y,\dot\gamma\rangle\dot\gamma = \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp + \langle \nabla_{\partial/\partial s}Y, \dot\gamma\rangle\dot\gamma.\end{aligned}$$

由 $\langle Y_\perp, \dot\gamma\rangle = 0$ 和 γ 为测地线知 $\langle \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp, \dot\gamma\rangle = 0$. 因此在 $(0,s)$ 处有

$$\begin{aligned}&\langle \nabla_T Y, \nabla_Y T\rangle - \langle \nabla_T Y, T\rangle^2 \\ =&\langle \nabla_T Y, \nabla_T Y\rangle - \langle \nabla_T Y, T\rangle^2 \\ =&\langle \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp + \langle \nabla_{\partial/\partial s}Y,\dot\gamma\rangle\dot\gamma, \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp + \langle \nabla_{\partial/\partial s}Y,\dot\gamma\rangle\dot\gamma\rangle \\ &-\langle \nabla_{\partial/\partial s}Y,\dot\gamma\rangle^2 \\ =&\langle \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp, \nabla_{\partial/\partial s}Y_\perp\rangle.\end{aligned}$$

证毕.

注 1.5.1　对于沿 γ 的分段光滑变分 $V : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0,l] \longrightarrow M$, 我们也可得到如下的第二变分公式. 选取 $0 := s_0 < s_1 < \cdots < s_k := l$ 使得 $V_i := V \mid (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[s_i, s_{i+1}] \longrightarrow M$ 对每个 $i = 0,1,\cdots,k-1$ 都是光滑的. 记 $Y_i(s) := \mathrm{d}V_i(\partial/\partial\varepsilon)\mid_{(0,s)}$, $T_i(s) := \mathrm{d}V_i(\partial/\partial s)\mid_{(0,s)}$. 由 V 的连续性知 $Y_i(s_{i-1}) = Y_{i-1}(s_{i-1})$ 在 $\varepsilon = 0$ 处与曲线 $\varepsilon \mapsto V_{i-1}(\varepsilon, s_{i-1}) = V_i(\varepsilon, s_{i-1})$ 相切, 且 $T_{i-1}(s_i) = T_i(s_i)$; 因此

$$\langle \nabla_{\partial/\partial\varepsilon}Y_{i-1}, T_{i-1}\rangle(s_{i-1}) = \langle \nabla_{\partial/\partial\varepsilon}Y_i, T_i\rangle(s_{i-1}).$$

所以我们有

$$L''(0) = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} (\langle \nabla_{\partial/\partial s}(Y_i)_\perp, \nabla_{\partial/\partial s}(Y_i)_\perp\rangle - \langle R((Y_i)_\perp,\dot\gamma)\dot\gamma, (Y_i)_\perp\rangle)(s)\mathrm{d}s \\ +(\langle \nabla_{\partial/\partial\varepsilon}(Y_k)_\perp, T_k\rangle(l) - \langle \nabla_{\partial/\partial\varepsilon}(Y_0)_\perp, T_0\rangle(0)).$$

若 V 是恰当的, 则

$$L''(0)=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}}(\langle\nabla_{\partial/\partial s}(Y_i)_\perp,\nabla_{\partial/\partial s}(Y_i)_\perp\rangle-\langle R((Y_i)_\perp,\dot\gamma)\dot\gamma,(Y_i)_\perp\rangle)(s)\mathrm{d}s.$$

定义 1.5.1 沿单位速度测地线 γ 的向量场 J 定义为沿 γ 的 Jacobi 场, 当且仅当 J 满足

$$J''+R(J,\dot\gamma)\dot\gamma=0, \tag{1.5.1}$$

其中 $J'=\nabla_{\partial/\partial s}J$, $J''=\nabla_{\partial/\partial s}\nabla_{\partial/\partial s}J$.

因为 $\dot\gamma$ 沿它本身是平行的, 并且 $R(Y,Z)W$ 关于 Y,Z 是反对称的, 可知对每个常数对 a,b, $(as+b)\dot\gamma(s)$ 为沿 γ 的 Jacobi 场. 若 J_1,J_2 为沿 γ 的 Jacobi 场, 则 $\langle J_1',J_2\rangle-\langle J_1,J_2'\rangle=$ 常数. 特别地, 对沿 γ 的每个 Jacobi 场 J, $\langle J',\dot\gamma\rangle$ 为常数. 设 $\mathcal{J}_\gamma$ 是所有沿 γ 的 Jacobi 场的集合, 则对所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 有 $\alpha J_1+\beta J_2\in\mathcal{J}_\gamma$, 因而 $\mathcal{J}_\gamma$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.

引理 1.5.1 设 $\gamma:[a,b]\longrightarrow M$ 是测地线, $t_0\in[a,b]$, 则对给定的 $u,v\in T_{\gamma(t_0)}$, 存在沿 γ 的唯一的 Jacobi 场 J, 使得 $J(0)=u$, $J'(0)=v$.

证明 设 $P_1,\cdots,P_n=\dot\gamma$ 是沿 γ 的正交平行标架场, 即 $g(P_i,P_j)=\delta_{ij}$, $\nabla_{\dot\gamma}P_i=0$. 沿 γ 的向量场 Y 表示为 $Y=\eta^iP_i$, 其中对每个 i, $\eta^i:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 都是光滑的, 则 $Y'=(\eta^i)'P_i$, 且 $Y''=(\eta^i)''P_i$. 若 Y 满足 (1.5.1) 式, 则对所有 $i=1,\cdots,n$, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^i}{\mathrm{d}t^2}+\eta^jR^i_{nnj}=0.$$

于是给定初始条件的解的存在性和唯一性就很清楚了. 证毕.

注 1.5.2 由引理 1.5.1, $\mathcal{J}_\gamma$ 构成一个 $2n$ 维向量场. 与测地变分相应的测地向量场是一个 Jacobi 场. 实际上, 若 V 是这样的测地变分, 并且 $T:=\mathrm{d}V(\partial/\partial t)$, $Y:=\mathrm{d}V(\partial/\partial\varepsilon)$, 则 $\nabla_TT=0$. 因此 $Y''=\nabla_T\nabla_TY=\nabla_T\nabla_YT=\nabla_Y\nabla_TT-R(Y,T)T$, 且 (1.5.1) 对这样的 Y 成立. 反之亦然: 即对给定的沿 γ 的 Jacobi 场 J, 存在 γ 的测地变分, 其变分向量场为 J.

引理 1.5.2 设测地线 $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$ 满足 $p=\gamma(0)$, $u=\dot\gamma(0)\in T_pM$. 对每个向量 $v\in T_pM$, 记 $J(t):=\mathrm{d}(\exp_p)_{tu}tv$. 则 J 是沿 γ 的 Jacobi 场, 且满足

$$J(0)=0,\quad J'(0)=v$$

证明 考虑沿 γ 的变分 $V:(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[0,l]\longrightarrow M$, 满足 $V(\varepsilon,t):=\exp_p t(u+\varepsilon v)$. 显然每条变分曲线 V_ε 都是测地线, 并且由 V 的构造知, 若 $J(t)=\mathrm{d}V(\partial/\partial\varepsilon)\mid_{(0,t)}$, 则 $J(0)=0$, $J'(0)=\nabla_{\partial/\partial t}\mathrm{d}V(\partial/\partial\varepsilon)\mid_{(0,0)}=\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}\mathrm{d}V(\partial/\partial t)\mid_{(0,0)}=v$. 证毕.

定义 1.5.2 设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是测地线, 点 $\gamma(t_0)$ 与 $p=\gamma(0)$ 共轭, 当且仅当存在沿 γ 的非平凡 Jacobi 场 J, 使得 $J(0)=J(t_0)=0$.

由引理 1.5.2, 沿 γ 点 $\gamma(t_0)$ 与 $\gamma(0)$ 共轭, 当且仅当 $\exp_p$ 在 $t_0\dot\gamma(0)$ 处奇异. 也就是说, 沿 γ 点 $\gamma(t_0)$ 不与 $\gamma(0)$ 共轭, 当且仅当 $\mathrm{d}(\exp_p)$ 在 $t_0\dot\gamma(0)$ 处具有最大秩. 记 $\mathcal{J}^0_\gamma(t_0)$ 是所有在 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(t_0)$ 消失的沿 γ 的 Jacobi 场的集合. $\mathcal{J}^0_\gamma(t_0)$ 构成了 $\mathcal{J}_\gamma$ 的一个线性子空间. 若 $\mathcal{J}^0_\gamma(t_0)$ 的维数为正的, 则称其为共轭点 $\gamma(t_0)$ 的重数, $\mathrm{d}(\exp_p)_{t_0\dot\gamma(0)}$ 的秩等于 $n-\dim\mathcal{J}^0_\gamma(t_0)$.

引理 1.5.3 假设测地线 $\gamma:[0,l]\to M$ 上没有 $p=\gamma(0)$ 沿 γ 的共轭点, 则 γ 具有局部极小性质.

证明 由假设, 在 $t\dot\gamma(0)$, $t\in[0,l]$ 处 $\mathrm{d}(\exp_p)$ 具有极大秩, 因此存在线段 $\{t\dot\gamma(0);0\leqslant t\leqslant l\}$ 附近的开集 $\Omega\subset\widetilde{M}_p$, 使得 $\exp_p|_\Omega:\Omega\to M$ 是正则的. 若 γ 的变分 $V:(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[0,l]\to M$ 满足对所有的 $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, $V(\varepsilon,0)=\gamma(0)$, $V(\varepsilon,l)=\gamma(l)$, 则它通过 $\exp_p|_\Omega$ 被提升到 $\widetilde{M}_p$. 注意到由于 $\exp_p|_\Omega$ 不一定是一一对应, 故 p 处的测地极坐标系不一定定义在 Ω 上. $\exp_p|_\Omega$ 的正则性说明 γ 只有有限多次自相交. 因此 Ω 可以分解到有限多个区域, 在每个区域上 p 点处的测地极坐标都有定义. 因而由 Gauss 引理 1.2.1, 对所有 $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\backslash\{0\}$, $L(\varepsilon)>L(0)$. 证毕.

截曲率与 Ricci 曲率的几何意义可以借助于 Jacobi 场来理解. 取满足 $u\perp v$ 的单位向量 $u,v\in S_p(1)$, 和满足 $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=u$ 的测地线 γ. 若 J 是沿 γ 的 Jacobi 场, 满足 $J(0)=0$, $J'(0)=v$, $U:=\dot\gamma$, 并且若 V 是由 $V(0)=v$ 生成的沿 γ 的平行场, 则对充分小的 t 有

$$J(t)=tV(t)-\frac{t^3}{3!}R(V(t),U(t))U(t)+o(t^3). \tag{1.5.2}$$

若 σ 是 u,v 张成的平面, $S^1(t)$ 是以 σ 的原点为中心的半径 t 充分小的圆, 则 $\exp_p S^1(t)$ 具有速度向量 $J(t)$. 因此 $\exp_p S^1(t)$ 的长度为

$$2\pi\|J(t)\|=2\pi t(1-(t^2/3!)K_\sigma+o(t^2)).$$

因此可以通过从 p 出发的测地线的发散度来理解 K_σ.

接下来我们取 T_pM 的正交基 $e_1,\cdots,e_n=\dot\gamma(0)$. 设 $\mathrm{d}\sigma$ 是 $S_p(1)$ 的体积元, 对每个 $i=1,\cdots,n-1$, Y_i 是满足 $Y_i(0)=0$, $Y_i'(0)=e_i$ 沿 γ 的 Jacobi 场, 则

$$(\exp_p)^*_{tu}\mathrm{d}M=(\det\mathrm{d}(\exp_p)_{tu})\mathrm{d}\sigma\wedge\mathrm{d}t.$$

因此有

$$\det\mathrm{d}(\exp_p)_{tu}=|Y_1\wedge Y_2\wedge\cdots\wedge Y_{n-1}\wedge\dot\gamma|(t).$$

从而 $Ric_M(u)$ 给出了当 $t \to 0$ 时 $S^{n-1}(t) := \exp_p tS_p(1)$ 在点 $\exp_p tu$ 的面积元和 $S_p(1)$ 的面积元之比的极限.

我们将给出具有常截曲率 (Ricci 曲率) 的 n 维黎曼流形的例子.

例 1.5.1 (欧氏空间) 令 $M := \mathbb{R}^n$. 对于 $(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, 标准度量为 $ds^2 := \delta_{ij}dx^i dx^j$. 所有的 Christoffel 符号等于 0, $R_{ijkl} = 0$. 因此 $\mathbb{R}^n$ 的截曲率 (Ricci 曲率) 等于 0.

例 1.5.2 (n 维球面的测地标架) 设 $M := \mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是半径等于 r 的标准 n 维球面. 记

$$\begin{aligned} D := &\{x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n; -\pi r/2 < x^1, \cdots, x^{n-1} < \pi r/2, \\ &-\pi r < x^n < \pi r\}. \end{aligned}$$

令 $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 定义为 $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^n)$,

$$\varphi^k(x) := r \sin \frac{x^k}{r} \prod_{l=1}^{k-1} \cos \frac{x^l}{r}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

$$\varphi^{n+1}(x) := r \prod_{l=1}^{n} \cos \frac{x^l}{r}.$$

则 $x := \varphi^{-1}$ 定义了区域 $U := \{x \in \mathbb{S}^n(r); x^n \neq 0, x^{n+1} > 0\}$ 上的一个坐标映射. 因为 $X_i = d\varphi(\partial/\partial x^i)$ 且

$$g_{ij} = d\varphi(\partial/\partial x^i) d\varphi(\partial/\partial x^j), \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

故

$$\begin{aligned} g_{11} = 1, g_{1i} = 0, \quad & i = 2, \cdots, n, \\ g_{ij} = \delta_{ij} \prod_{l=1}^{i-1} \cos^2 \frac{x^l}{r}, \quad & i, j > 1 \end{aligned}$$

并且

$$g^{ij} = \delta^{ij} \prod_{l=1}^{i-1} \cos^{-2} \frac{x^l}{r}.$$

进一步计算可得

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^k_{kk} = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

$$\Gamma^k_{kj} = \Gamma^j_{kk} = 0, \quad j \geqslant k,$$

$$\Gamma^k_{jj} = \frac{1}{r} \tan \frac{x^k}{r} \prod_{l=k}^{j-1} \cos^2 \frac{x^l}{r}, \quad k < j,$$

$$\Gamma^j_{kj} = -\frac{1}{r} \tan \frac{x^k}{r}, \quad k < j.$$

利用

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ki} + \partial_k\partial_i g_{jl} - \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_j\partial_k g_{il})$$
$$+g_{ab}(\Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{jl} - \Gamma^a_{il}\Gamma^b_{jk}),$$

可得对所有不同的 i, j, k, l, 有

$$R_{ijkl} = 0, \quad R_{ijki} = 0,$$

则对 $i > k$, R_{ikik} 可以表示为

$$R_{ikik} = \frac{1}{2}\partial_k\partial_k g_{ii} + \sum_{a<k} g_{aa}\Gamma^a_{ii}\Gamma^a_{kk} - g_{ii}(\Gamma^i_{ik})^2 = -\frac{g_{ii}g_{kk}}{r^2}.$$

因此 $R_{ijkl} = (1/r^2)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, 且 $R(X_l, X_k)X_j = (1/r^2) \times \{g_{jk}X_l - g_{jl}X_k\}$. 因而对 $u, v, w \in T_pM$, 有

$$R(u,v)w = \frac{1}{r^2}(< v, w > u - < u, w > v).$$

特别地, 截曲率和 Ricci 曲率分别为常数 $1/r^2$ 和 $(n-1)/r^2$.

例 1.5.3 (双曲空间) 设 $H^n(-c^2)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的半开空间 $\{x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n > 0\}$ 上的黎曼流形, 度量为

$$ds^2 := \frac{\delta_{ij}dx^i dx^j}{c^2(x^n)^2}.$$

这是一个完备的黎曼流形. 可以证明

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \quad \text{其中 } i, j, k \text{ 两两不同},$$
$$\Gamma^i_{nn} = \Gamma^n_{ni} = \Gamma^i_{jj} = \Gamma^i_{ji} = \Gamma^i_{ii} = 0, \quad i, j = 1, \cdots, n-1,$$
$$\Gamma^i_{ni} = \Gamma^n_{nn} = -\frac{1}{x^n} = -\Gamma^n_{ii}, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

由

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ki} + \partial_k\partial_i g_{jl} - \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_j\partial_k g_{il})$$
$$+g_{ab}(\Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{jl} - \Gamma^a_{il}\Gamma^b_{jk}),$$

可得

$$R_{ijkl} = 0, \quad R_{ijki} = 0,$$
$$R_{ikik} = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{kk} + g_{nn}\Gamma^n_{ii}\Gamma^n_{kk} = c^2 g_{ii}g_{kk}, \quad i > k.$$

因此有

$$R_{ijkl} = -c^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

并且 $R(X_l, X_k)X_j = -c^2(g_{jk}X_l - g_{jl}X_k)$. 因此 $H^n(-c^2)$ 的截曲率和 Ricci 曲率分别为 $-c^2$ 和 $-(n-1)c^2$.

§6 指标形式

现在讨论存在共轭对之后测地线的局部极小性质. 测地线 γ 的指标形式是作为 γ 的向量场上的对称双线性形式引入的. 若 γ 没有共轭对, 则由引理 1.5.3 可知它是局部极小的. 在这种情形下 γ 的指标形式是正定的.

定义 1.6.1 设 $\mathcal{X}$ 是一条给定测地线 $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$ 的所有 (分段) 光滑向量场的集合, $\mathcal{X}_\perp$ 是所有与 γ 正交的 (分段) 光滑向量场的集合. 如下定义 γ 的指标形式 $I : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. 设 $X, Y \in \mathcal{X}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = l$, 使得对所有的 $i = 1, \cdots, k-1$, $X\mid_{[t_{i-1}, t_i]}$ 和 $Y\mid_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都是光滑的, 则

$$I(X, Y) := \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\langle X_i', Y_i' \rangle - \langle R(X_i, \dot\gamma)\dot\gamma, Y_i \rangle \right) \mathrm{d}t.$$

显然 I 是对称双线性的. 若 X 和 Y 是光滑的, 则

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= \langle X', Y \rangle \mid_0^l - \int_0^l (\langle X'' + R(X, \dot\gamma)\dot\gamma, Y \rangle) \mathrm{d}t \\ &= \langle X, Y' \rangle \mid_0^l - \int_0^l (\langle Y'' + R(Y, \dot\gamma)\dot\gamma, X \rangle) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

因此若 Y 是沿 γ 的 Jacobi 场, 则对所有的 $X \in \mathcal{X}$,

$$I(X, Y) = \langle X, Y' \rangle \mid_0^l.$$

引理 1.6.1 设 $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$ 是测地线, 且 $p = \gamma(0)$ 有共轭点 $\gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, l)$. 则存在 γ 的分段光滑变分 $V : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0, l] \longrightarrow M$, 使得对 $\varepsilon > 0$, 有 $L(\varepsilon) < L(0)$.

证明 由关于 γ 的假设知, 存在沿 γ 的非平凡 Jacobi 场 J, 使得 $J(0) = J(t_0) = 0$. 设 $P \in \mathcal{X}_\perp$ 是由 $-J'(t_0) \neq 0$ 生成的 γ 的平行场, $f : [0, l] \longrightarrow [0, 1]$ 是光滑函数, 满足 $f(0) = f(l) = 0$, 且 $f(t_0) = 1$. 对于充分小的正数 h, 定义向量场 Y_h 为

$$Y_h(t) = \begin{cases} J(t) + h(fP)(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\ h(fP)(t), & t_0 \leqslant t \leqslant l, \end{cases}$$

则 $Y_h \in \mathcal{X}_\perp$, $Y_h(0) = Y_h(l) = 0$, 因此

$$I(Y_h, Y_h) = \langle J, J' \rangle(t_0) + 2h\langle J', fP \rangle(t_0) + h^2 I(fP, fP).$$

因为 $J'(t_0) = -P(t_0)$, 故对充分小的 $h > 0$, 有

$$I(Y_h, Y_h) = -2h\langle J', J' \rangle(t_0) + h^2 I(fP, fP) < 0.$$

证毕.

现在考虑集合 $\mathcal{X}'_\perp := \{Y \in \mathcal{X}_\perp; Y(0) = Y(l) = 0\}$. 我们将证明 $\mathcal{X}'_\perp$ 中所有 Jacobi 场都可通过 I 在 $\mathcal{X}'_\perp$ 中的零空间进行划分.

引理 1.6.2 向量场 $J \in \mathcal{X}'_\perp$ 是 Jacobi 场当且仅当对所有 $Y \in \mathcal{X}'_\perp, I(J, Y) = 0$.

证明 若 $J \in \mathcal{X}'_\perp$ 是 Jacobi 场, 显然对所有 $Y \in \mathcal{X}'_\perp$, 有 $I(J, Y) = 0$. 若对所有 $Y \in \mathcal{X}'_\perp$, $J \in \mathcal{X}'_\perp$ 满足 $I(J, Y) = 0$, 则选取 $0 = t_0, \cdots, t_k = l$ 使得对所有 $i = 1, \cdots, k$, $J_i := J\mid_{[t_{i-1}, t_i]}$ 光滑. 设光滑函数 $f_i : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow [0, 1]$ 满足 $f_i(t_{i-1}) = f_i(t_i) = 0$, 并且在 (t_{i-1}, t_i) 上 $f_i > 0$, 并记 $Z_i := f_i(J''_i + R(J_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma})$. 对 $t \in [t_{i-1}, t_i]$, 记 $Z(t) := Z_i(t)$, 则

$$0 = I(J, Z) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_i \parallel J''_i + R(J_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \parallel^2 \mathrm{d}t.$$

因此对每个 $i = 1, \cdots, k-1$, J_i 是 $\gamma\mid_{[t_{i-1}, t_i]}$ 的 Jacobi 场. 为了证明 J 的光滑性, 选取向量场 $\widetilde{Z} \in \mathcal{X}'_\perp$, 使得对每个 $i = 1, \cdots, k-1$, 都有 $\widetilde{Z}(t_i) = J'_{i+1}(t_i) - J'_i(t_i)$, 则

$$0 = I(J, \widetilde{Z}) = \sum_{i=1}^{k} \langle J', \widetilde{Z} \rangle \mid_{t_{i-1}}^{t_i} = \sum_{i=1}^{k-1} \parallel J'_{i+1} - J'_i \parallel^2 (t_i).$$

证毕.

定理 1.6.1 设测地线 $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$ 上不存在 $\gamma(0)$ 的共轭点. 若 J 是 γ 的 Jacobi 场, 满足 $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$, 并且 $X \in \mathcal{X}_\perp$ 满足 $X \neq J, X(0) = J(0), X(l) = J(l)$, 则

$$I(X, X) > I(J, J).$$

证明 由于 $X - J \in \mathcal{X}'_\perp$, $X - J \neq 0$, 由以上可知 $I(X - J, X - J) > 0$. 故

$$\begin{aligned} I(X - J, X - J) &= I(X, X) - 2I(X, J) + I(J, J) \\ &= I(X, X) - 2\langle X, J' \rangle \mid_0^l + \langle J, J' \rangle \mid_0^l \\ &= I(X, X) - I(J, J). \end{aligned}$$

证毕.

注 1.6.1 由定理 1.6.1 知, 对任意给定的 $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant l$ 和任意给定的向量 $u \in T_{\gamma(t_0)}M$, $v \in T_{\gamma(t_1)}M$, 存在唯一的 Jacobi 场 J, 使得 $J(t_0) = u$, $J(t_1) = v$.

由以上的讨论得到引理 1.5.3 的一个改进形式:

命题 1.6.1 测地线 $\gamma:[0,l]\to M$ 的指标形式在 $\mathcal{X}'_\perp$ 上是正定的当且仅当 γ 没有共轭对.

证明 首先假设 I 在 $\mathcal{X}'_\perp$ 上正定. 假设对某个 $t_0\in(0,l),\gamma(t_0)$ 是 $p:=\gamma(0)$ 的共轭点. 由引理 1.6.1, 存在 Jacobi 场 $Y\in\mathcal{X}'_\perp$ 使得 $I(Y,Y)<0$. 矛盾.

假设 γ 没有共轭对, 记 $q:=\gamma(l)$. 则 $\exp_p|_{[0,l]\dot\gamma(0)}$ 和 $\exp_q|_{[-l,0)\dot\gamma(l)}$ 为正则的. 若对某个 $t_0\in(0,l)$, $Y\in\mathcal{X}'_\perp$ 满足 $Y(t_0)\neq 0$, 则存在 $\widetilde{M}_p$ 中以 $l\dot\gamma(0)$ 和 $[\mathrm{d}(\exp_p)_{t_0\dot\gamma(0)}]^{-1}(Y(t_0))$ 为边的平面三角形, 夹角恰好在 $l\dot\gamma(0)$. 同样, 也存在 $\widetilde{M}_q$ 中以 $-l\dot\gamma(l)$ 和 $[\mathrm{d}(\exp_q)_{(t_0-l)\dot\gamma(l)}]^{-1}$ $(Y(t_0))$ 为边的平面三角形. 与 Gauss 引理 1.2.1 的证明一样, 我们如下构造 $\widetilde{V}:(-\varepsilon,\ \varepsilon)\times[0,l]\to M$. 若 $V:(-\varepsilon,\ \varepsilon)\times[0,l]\to M$ 是 γ 的对应于 Y 的恰当变分, 使得对所有的 $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $V(s,t_0)=\widetilde{V}(s,t_0)$, 则由 Gauss 引理, 对所有的 $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 有 $L(V(s))\geqslant L(\widetilde{V}(s))$, $L(V(0))=L(\widetilde{V}(0))=l$. 若 J 是相对于 $\widetilde{V}$ 的变分向量场, 则 J 是使得 $J(0)=Y(0)=0$, $J(l)=Y(l)=0$, $J(t_0)=Y(t_0)$ 的 Jacobi 场. 由定理 1.6.1 得 $I(Y,Y)\geqslant I(J,J)>0$, 则由 $\widetilde{V}$ 的构造知 $I(J,J)=L''(\widetilde{V}(0))$. 证毕.

最后我们讨论 M 上测地球的第二基本形式与指标形式的关系.

对于任意固定的 $p\in M$, 向量 $u_0\in\widetilde{M}_p$ 使得 $\exp_p$ 在 u_0 处正则, 选择区域 $W\in\widetilde{M}_p$ 使得 $u_0\in W$, $\exp_p|_W:W\to M$ 是嵌入. 记 $q:=\exp_p u_0$, $l:=\|u_0\|$, 定义 q 附近的一段光滑测地 l- 球面 N 为 $N:=(\exp_p|_W)(S_p(l)\bigcap W)$. 对于每个点 $x\in N$, 存在唯一的测地线 $\gamma_x:[0,l]\to M$, 使得 $\gamma_x(0)=p$, $\gamma_x(l)=x$, $l\dot\gamma(0)\in S_p(l)\bigcap W$. 定义一个垂直于 N 的单位场 ξ 为

$$\xi(x):=-\dot\gamma_x(l),\ x\in N.$$

对于每个 $v\in T_qN$ 和满足 $c(0)=q$, $\dot c(0)=v$ 的光滑曲线 $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$, 定义沿 $\gamma:=\gamma_q$ 的测地变分 $V:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,l]\to M$ 为

$$V(s,t):=\gamma_{c(s)}(t),\quad (s,t)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,l].$$

若 Y 是对应于 V 的变分向量场, 则 Y 必为沿 γ 的满足 $Y(0)=0$, $Y(l)=v$ 的 Jacobi 场. 由第二变分公式得

$$0=L''(V_s)\mid_{s=0}=\int_0^l(\langle Y',Y'\rangle-\langle R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma,Y\rangle)\mathrm{d}t-\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}Y,\dot\gamma\rangle\mid_0^l.$$

由于 $\dot\gamma(l)=-\xi(q)$, 可知

$$\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}Y,\dot\gamma\rangle(0,l)=-\langle A_\xi v,v\rangle.$$

因此有

$$\langle A_\xi v,v\rangle=\langle Y,Y'\rangle(l)=I(Y,Y),\quad v\in T_qN.$$

则由沿径向测地线 Jacobi 场的指标形式可得 A_ξ 的主曲率.

例 1.6.1 若 $M=\mathbb{R}^n$ 如例 1.5.1 的假设, 则 $Y(t)=(t/l)E(t)$, 其中 E 是由 $v:=E(l)$ 生成的沿 γ 的平行场. 于是有 $I(Y,Y)=\| v \|^2 /l$, $A_\xi=(1/l)E_{n-1}$. l-球面的所有主曲率都等于常数 $1/l$.

例 1.6.2 设 $M=\mathbb{S}^n(r)$ 是如例 1.5.2 中假设的 r- 球面, 则

$$Y(t)=\frac{\sin(t/r)}{\sin(l/r)}E(t),\quad R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma=\frac{1}{r^2}Y.$$

因而 $I(Y,Y)=\cot(l/r)\| v \|^2$ 且

$$A_\xi=\begin{cases}\cot(l/r)E_{n-1}, & r\neq \pi r/2;\\ 0, & r=\pi r/2.\end{cases}$$

例 1.6.3 若 $M=H^n(-c^2)$ 如例 1.5.3 中假设, 则 $Y(t)=(\sinh ct/\sinh cl)\cdot E(t)$, $R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma=-c^2Y$. 可以证明 $I(Y,Y)=\| v \|^2\coth cl$, $A_\xi=\coth cl\, E_{n-1}$.

§7 完备黎曼流形

黎曼流形具有度量空间的结构. 首先我们将证明黎曼几何的基本定理, 然后利用指标形式和 Jacobi 场证明 Whitehead 凸性定理 [108] 和 Hopf, Rinow, de Rham 的完备性定理, 我们将证明每个黎曼流形的拓扑等价于 M 作为一个度量空间的拓扑.

首先定义 M 上的距离函数 d 如下. 对于 $p,q\in M$, 非负数 $d(p,q)$ 定义为

$$d(p,q):=\inf_c L(c),$$

这里的极小值是对所有连接 p,q 的分段光滑函数曲线取的. 由引理 1.2.2 不难验证以上的 d 定义了 M 上的距离. 因此 M 具有度量空间的结构, 且距离函数 d 由 g 诱导. 若测地线 $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$ 的长度恰好等于其两端点间的距离, 则称 γ 为极小的.

记以 p 为中心的 r 维开球为 $B(p,r)=\{x\in M; d(p,x)<r\}$, $\overline{B(p,r)}$ 为它的闭包.

定义 1.7.1 (1) 开集 $A\subset M$ 称为凸的, 当且仅当任意的点 $p,q\in A$, 可以由完全包含在 A 中的极小测地线连接.

(2) 点 $p\in M$ 处的凸半径 $\mathrm{conv}\,p$ 是以 p 为中心的凸开球的最大半径. 集合 $A\subset M$ 的凸半径 $\mathrm{conv}\,A$ 定义为 A 上各点处凸半径的下确界.

(3) 集合 $A \subset M$ 称为局部凸的, 当且仅当对每个点 $p \in \overline{A}$, 存在一个小正数 r, 使得 $\overline{A} \bigcap B(p,r)$ 为凸的.

(4) 函数 $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ 称为凸的, 当且仅当对每条测地线 γ, $f \circ \gamma$ 是凸的.

定理 1.7.1 (J.H.C. Whitehead) 存在 (Lipschitz) 连续正值函数 conv : $M \to \mathbb{R}$, 使得对任意点 $q \in B(p, \operatorname{conv} p)$, 若 $B(q,s) \subset B(p, \operatorname{conv} p)$, 则 $B(q,s)$ 是凸的.

证明 为了证明在每一点 $p \in M$ 处凸球的存在性, 我们记

$$K := \frac{\max}{\pi(\sigma) \in B(p, i(p))} \mid K_\sigma \mid .$$

由定理 1.2.2 和 (1.4.5), 存在常数 $a(p) > 0$, 使得若测地线 $\gamma : [0, l] \to M$ 满足 $\gamma(0) = p, l < a(p)$, 且 $J \in \mathcal{X}_\perp$ 是满足 $J(0) = 0$ 的沿 γ 的 Jacobi 场, 则 $\langle J, J' \rangle (l) > 0$. 记 $\alpha(p) := \min\{i(p)/2, a(p)\}$. 由引理 1.2.2 可知每一点 $q \in B(p, \alpha(p))$ 由唯一的一条极小测地线与 p 相连接. 设测地线 c 满足 $c(0) \in B(p, \alpha(p))$, $V : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0,1] \to B(p, \alpha(p))$ 是由 $V(\varepsilon, t) := \exp_p t(\exp_p|_{U_p})^{-1} \circ c(\varepsilon)$ 定义的测地变分. 则对所有满足 $c(\varepsilon) \in B(p, \alpha(p))$ 的 ε 有 $L''(\varepsilon) > 0$. 这说明到 p 的距离函数在 $B(a, \alpha(p))$ 上是凸的. 因此 $B(p, \alpha(p))$ 是凸的. 为了完成证明只需如下定义 conv . 令 $\operatorname{conv} p$ 是具有如下性质的 $\alpha(p)$ 的上确界: 若 $B(q,s) \subset B(p, \alpha(p))$, 则 $B(q,s)$ 是凸的. 由 conv 的定义知 $\mid \operatorname{conv} p - \operatorname{conv} q \mid \leqslant d(p,q)$, 因此 $\operatorname{conv} p$ 是 Lipschitz 连续的, Lipschitz 常数为 1. 证毕.

黎曼几何基本定理表述如下.

定理 1.7.2 黎曼流形 M 的拓扑等价于 M 作为度量空间的拓扑.

练习 1.7.1 证明定理 1.7.2.

Hopf-Rinow-de Rham 的完备性定理归纳如下, 黎曼流形 M 被称作完备的, 当且仅当 (M, d) 是完备度量空间.

定理 1.7.3 (Hopf-Rinow-de Rham) 设 M 是黎曼流形, 距离函数 d 由 g 诱导, 则以下 (1) ~ (3) 等价:

(1) M 完备.

(2) 对所有 $p \in M, \widetilde{M}_p = T_pM$.

(3) 对某个 $p \in M, \widetilde{M}_p = T_pM$.

特别地, 若 M 完备, 则任意两点可以由极小化测地线连接.

证明 由 (1) 可以得到 (2), 进而得到 (3). 为此, 假设对某个 $p \in M$, 存在向量 $u \in T_pM \backslash \widetilde{M}_p$. 则存在 $t_0 > 0$, 使得对所有 $t \in (0, t_0)$, $tu \in \widetilde{M}_p$, 并且 $t_0 u \notin \widetilde{M}_p$.

若 $\gamma_u(t) := \exp_p tu$, 则可找到 Cauchy 序列 $\{\exp_p t_j u\}$, 使得 $\lim_{j\to\infty} t_j = t_0$. 由 M 的完备性知 $\gamma_u(t_0) \in M$, 矛盾.

记

$$C_\rho := \{x \in \overline{B(p,\rho)}; x \text{ 由极小测地线与 } p \text{ 相连接}\}.$$

由引理 1.2.2 知, 对所有 $\rho \in (0, i(p)), C_\rho = \overline{B(p,\rho)}$. 记 $\rho_0 := \sup\{\rho > 0; C_\rho = \overline{B(p,\rho)}\}$. 我们断言 $C_{\rho_0} = \overline{B(p,\rho_0)}$, 并且对所有 $\rho \in (0, \rho_0]$, $\overline{B(p,\rho)}$ 是紧致的. 假设在 $B(p,\rho_0)$ 中存在点列 $\{q_j\}$, 使得 $\lim_{j\to\infty} q_j = q$. 设极小化测地线 $\gamma_j : [0, l_j] \to M$ 满足 $\gamma_j(0) = p$, $\gamma_j(l_j) = q_j, l_j < \rho_0$. 显然 $\{\dot\gamma_j(0)\} \subset S_p(1)$ 和 $\{l_j\}$ 都有收敛子列, 不妨设 $\lim_{k\to\infty} \dot\gamma_k(0) = v$, $\lim_{j\to\infty} l_j = l$. 因为测地线的解连续依赖于初始条件, 故存在测地线 $\gamma(y) = \exp_p tv, t \in [0, l]$, 使得 $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = q$. 由 d 的连续性可知 γ 是极小的, 且 $q \in C_{\rho_0}$. 以上证明了对所有 $\rho \in (0, \rho_0]$, $\overline{B(p,\rho)}$ 的列紧性.

接下来我们断言 $C_{\rho_0} = \overline{B(p,\rho_0)} = M$. 假设 $M \setminus \overline{B(p,\rho_0)} \neq \varnothing$, 则存在一个点使得这点到 $\overline{B(p,\rho_0)}$ 的距离是 $a > 0$. 集合 $\partial B(p,\rho_0) \neq \varnothing$ 是紧致的. 定理 1.7.1 说明存在充分小的正数 $h < a$, 使得 $h = \operatorname{conv} \partial B(p,\rho_0)$, 记

$$W := \bigcup_{x \in \partial B(p,\rho_0)} B(x, h/4).$$

对任意点 $y \in W$, 可找到 $x \in \partial B(p,\rho_0)$, 使得 $d(x,y) < h/4$. 若点 $z \in \partial B(p,\rho_0)$ 满足 $d(y,z) = d(y, \overline{B(p,\rho_0)})$, 则 $z \in B(y, h/2) \subset B(x,h)$. 由定理 1.7.1 知 z 由唯一的极小测地线与 y 相连接. 由于 $z \in \overline{B(p,\rho_0)} = C_{\rho_0}$, 它也由极小测地线与 p 相连接, 这两条测地线构成一条长度为 $d(p,y)$ 的极小测地线. 显然, $B(p, \rho_0 + h/4) \subset B(p,\rho_0) \bigcup W$, 因此, $\overline{B(p, \rho_0 + h/4)} = C_{\rho_0 + h/4}$. 这与 ρ_0 的选取矛盾, 于是证明了 (3).

显然 (3) 可推出 (1). 证毕.

在关于曲率和黎曼流形拓扑的研究中, Alexandrov-Toponogov 三角形比较定理发挥着基础性作用, 我们不加证明地给出这一定理.

定理 1.7.4 (三角形比较定理) 设 M 是一个完备黎曼流形, 它在所有平截面的截面曲率有下界 k. 如果 $\Delta = \Delta(\alpha\beta\gamma)$ 是由 M 中的极小测地线构成的三角形, 则在具有常曲率 k 的完备单连通 2 维流形 $M^2(k)$ 中存在一个相应的边长相同的三角形 $\tilde\Delta = \tilde\Delta(\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\gamma)$, 使得 Δ 的每个角不小于 $\tilde\Delta$ 中相应的角.

§8 最短路径原理

在这一节中假设 M 是完备 n 维黎曼流形. 最短路径原理是本书中的一个基本工具.

引理 1.8.1 (最短路径原理)　设 (极小) 测地线 $\gamma_i:[0,a_i]\longrightarrow M$, $i=1,2$, 满足 $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=x$, γ_1 与 γ_2 在 x 处有夹角 θ. 若 $\theta<\pi$, 则对充分小的 $h>0$, 存在连接 $\gamma_1(a_1)$ 和 $\gamma_2(a_2)$ 的测地多边形 P, 使得 $a_1+a_2-L(P)>h\cos(\theta/2)$.

证明　设测地线 $\alpha:[0,r]\longrightarrow M$ 满足 $\alpha(0)=x$, 且 $\dot\alpha(0)$ 平分 $\dot\gamma_1(0)$ 与 $\dot\gamma_2(0)$ 在 x 处的夹角. 若对充分小的 $h>0$, $\dot\alpha^{\perp}(h)\subset T_{\alpha(h)}M$ 是与 $\dot\alpha(h)$ 正交的超平面, 且 conv是定理 1.7.1 中所描述的凸半径函数, 则 $\exp_{\alpha(h)}\{\dot\alpha^{\perp}(h)\bigcap B(0,\operatorname{conv}\alpha(h))\}$ 在点 p_i 处与 $\gamma_i[0,a_i]$ 相交. 距离函数 $s\mapsto d(p_i,\alpha(s))$ 是光滑凸的, 并且在 $\alpha(h)$ 处取最小值. 由第一变分公式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}d(p_i,\alpha(s))\,|_{s=0}=-\cos\frac{\theta}{2},\qquad i=1,2.$$

因此对某个 $\eta_i\in(0,1)$ 有

$$d(p_i,\alpha(h))=d(p_i,x)-h\cos\frac{\theta}{2}+\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}d(p_i,\alpha(\eta_i h)).$$

上式中右边最后一项由沿凸球上测地线的指标形式确定, 因此可以找到充分小的正数 $h_0>0$, 它仅依赖于一个紧致集 A 上的局部不变量, 使得对每个 $h\in(0,h_0)$,

$$-h\cos\frac{\theta}{2}+\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}d(p_i,\alpha(\eta_i h))\leqslant-\frac{h}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

若 $P:=\gamma_1(a_1)p_1\bigcup p_1p_2\bigcup p_2\gamma_2(a_2)$ 是由顺次连接 $\gamma_1(a_1),p_1,p_2,\gamma_2(a_2)$ 得到的折线测地线, 则

$$a_1+a_2-L(P)=\sum_{i=1}^{2}\{d(p_i,x)-d(p_i,\alpha(h))\}>h\cos(\theta/2).$$

证毕.

注 1.8.1　设 $A\subset M$ 是一个闭集, $p\notin A$. 若极小测地线 $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$ 满足 $\gamma(0)=p$, $\gamma(l)\in A$, 且 $L(\gamma)=d(p,A)$, 则称 γ 为从 p 到 A 的极小测地线. 对每个 $s\in(0,l)$, $\gamma\,|_{[s,l]}$ 是从 $\gamma(s)$ 到 A 的唯一极小测地线. 即两条到 A 的极小测地线不在任意一条的内部相交. 这一结论是最短路径原理的直接推论.

设曲线 $c:[0,1]\longrightarrow M$ 满足 $c(0)=p$, $c(1)=q$. 由最短路径原理, 可以建立 c 和由所有连接 p,q 的曲线构成的空间中的一条测地线的同伦, 并且同伦曲线的长度递减.

设 A 是 $c[0,1]$ 附近包含 $L(c)$- 球的紧致集, 并记 $2r_0:=\operatorname{conv}A$. 对一个固定的充分小的正数 η 和固定的充分大的数 m, 取分割 $0=a_0<a_1<\cdots<a_m=1$, 使得

$$\eta<L(c\,|_{[a_j,a_{j+1}]})<\frac{1}{2}r_0,\qquad j=0,\cdots,m-1.$$

令 $\gamma_{j,t}:[a_j,(1-t)a_j+ta_{j+1}]\rightarrow M$ 是唯一满足 $\gamma_{j,t}(a_j)=c(a_j)$ 和 $\gamma_{j,t}((1-t)a_j+ta_{j+1})=c((1-t)a_j+ta_{j+1})$ 的极小测地线. 显然 $\gamma_{j,0}$ 是点曲线, $\gamma_{j,1}$ 是连接 $c(a_j)$

和 $c(a_{j+1})$ 的极小测地线. 令 $P := pc(a_1)\bigcup c(a_1)c(a_2)\bigcup\cdots\bigcup c(a_{m-1})q$ 是连接 p 和 q 的折线测地线. c 和 P 之间的同伦 $H:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow M$ 如下给出:

$$H(t,s):=\begin{cases}\gamma_{j,t}(s), & s\in[a_j,(1-t)a_j+ta_{j+1});\\ c(s), & s\in[(1-t)a_j+ta_{j+1},a_{j+1}).\end{cases}$$

由 H 的构造可知 $H(0,s)=c(s)$, 且 $H(1,\cdot)$ 的像为 P, 则由最短路径原理知, 除非 c 是测地线, 否则 $L(H(t,\cdot))$ 在 t 是严格递减的. H 称作 c 的长度递减形变.

引理 1.8.2 令 $c:[0,1]\to M$ 是连接 p,q 的曲线, 则存在测地线 γ, 它与 c 具有相同的极值点, 使得 γ 与 c 同伦, $L(\gamma)\leqslant L(c)$.

证明 利用上面的记号, 我们记 $P_0:=P$. P_0 的隅角表示为 $p_{0,0}:=p$, $p_{0,1}$, $\cdots$, $p_{0,m}:=q$. 对每个 $i=1,\cdots,m-1$, 记 $q_{0,i}$ 为 P_0 的边 $p_{0,i-1}p_{0,i}$ 的中点, 并记 $q_{0,0}:=p, q_{0,m}:=q$. 类似的, 对每个 $i=1,\cdots,m-1$, 设 $p_{1,i}$ 是边 $q_{0,i}q_{0,i+1}$ 的中点, 并记 $p_{1,0}:=p$, $p_{1,m}:=q$. 若 P_1 是折线测地线 $P_1:=pp_{1,0}\bigcup\cdots\bigcup p_{1,m-1}q$, 则我们可以得到 P_1 与折线测地线 $pq_{0,1}\bigcup\cdots\bigcup q_{0,m-1}q$ 同伦, 这条曲线在相差一个长度递减形变的条件下也与 P 同伦. 因此, 在紧致集 A 中存在连接 p,q 的折线测地线序列 $\{P_j\}$, 使得对所有的 j, P_j 由 P_{j-1} 的长度递减形变得到. 而且, P_j 的隅角 $p_{j,0}$, $\cdots,p_{j,m}$ 按此顺序, 且对所有的 i 和 j, $d(p_{j,i},p_{j,i+1})<r_0/2$. Ascoli 定理指出存在 $\{P_j\}$ 的子序列 $\{P_k\}$, 使得对每个 $i=1,\cdots,m-1$, $\{p_{k,i}\}$ 收敛于点 $p_{\infty,i}$. 记 $P_\infty:=pp_{\infty,1}\bigcup\cdots\bigcup p_{\infty,m-1}q$. 为说明 P_∞ 是连接 p,q 的测地线, 假设 P_∞ 的某个隅角 $p_{\infty,i}$ 处的角 θ_i 小于 π, 由引理 1.8.1, 对充分小的 $h>0$ 可以找到充分大的 k, 使得对所有的 $j=1,\cdots,m-1$,

$$d(p_{\infty,j},p_{k,j})<\frac{h}{4m}\cos\frac{\theta_i}{2},$$
$$L(P_k)-L(P_{k+1})>\frac{h}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}.$$

则有

$$L(P_\infty)<L(P_{k+1})<L(P_k)-\frac{h}{2}\cos\frac{\theta_i}{2},$$

且

$$L(P_\infty)>L(P_k)-2\sum_{j=1}^{m-1}d(p_{\infty,j},p_{k,j})>L(P_k)-\frac{2(m-1)h}{4m}\cos\frac{\theta_i}{2}.$$

矛盾. 证毕.

§9 Gauss-Bonnet 定理

在这一节中我们不用 Green-Stocks 定理来证明著名的 Gauss-Bonnet 定理,

我们的证明并不要求曲面和区域的可定向性. 将它推广到闭的 Alexandrov 曲面和 Busemann G- 曲面也是很有趣的.

设 M 为连通、紧致 (不必为定向的) 2 维黎曼流形, $\mathrm{d}M$ 为 Lebesgue 测度, G 为 Gauss 曲率. 设区域 $\Omega \subset M$ 的边界 $\partial\Omega$ 是分段光滑简单闭曲线 $c_1, \cdots, c_k$ 的有限并集. 设 $\boldsymbol{e}$ 是沿 $\partial\Omega$ 的光滑段的内单位法向量场, Ω 的曲率测度写作

$$c(\Omega) := \int_\Omega G\mathrm{d}M, \tag{1.9.1}$$

称为 Ω 的全曲率. 设 $\omega_{i,1}, \cdots, \omega_{i,r_i}$ 是 c_i 隅角的内角, $\boldsymbol{k}_i$ 是测地曲率向量. 设 I 是 c_i 上的可测集, I 的全测地曲率为

$$\lambda(I) := \int_I \langle \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e}\rangle \mathrm{d}s + \sum_I (\pi - \omega_{i,j}),$$

其中右边第二项是 I 中隅角的和. $\partial\Omega$ 的内角不依赖于 Ω 的定向. 因此可得

$$\lambda(\partial\Omega) := \sum_{i=1}^k \lambda(c_i) = \sum_{i=1}^k \left\{ \oint_{c_i} \langle \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e}\rangle \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{r_i} (\pi - \omega_{i,j}) \right\} \tag{1.9.2}$$

不依赖于 $\partial\Omega$ 的定向, 称之为 $\partial\Omega$ 的全测地曲率. 利用上面的记号, Gauss-Bonnet 定理叙述如下.

Gauss-Bonnet 定理 若 $\chi(\Omega)$ 是 Ω 的 Euler 欧拉示性数, 则

$$c(\Omega) + \lambda(\partial\Omega) = 2\pi\chi(\Omega). \tag{1.9.3}$$

特别地, 若 M 无边, 则

$$c(M) = 2\pi\chi(M). \tag{1.9.4}$$

定理的证明过程中需要用到以下两个引理. 这些引理不依赖于 M 的定向.

引理 1.9.1 设 $\triangle = \triangle(pqr) \subset M$ 是顶点为 p, q, r 的测地三角形, 并且完全包含于凸球当中. 若 A, B, C 是 $\triangle$ 的内角, 则

$$c(\triangle) = A + B + C - \pi. \tag{1.9.5}$$

证明 若 x, y 在一个凸球中, 则存在唯一的极小测地线 xy 连接 x 和 y, 对充分大的 N, 在 qr 上取点 $p_{0,0}, \cdots, p_{N,0}$, 在 rp 上取 $q_{0,0}, \cdots, q_{0,N}$, 在 qp 上取 $r_{0,0}, \cdots, r_{0,N}$, 使得 $q = p_{0,0} = r_{0,0}$, $r = p_{N,0} = q_{0,0}$, $p = r_{0,N} = q_{0,N}$, 则可将 $\triangle$ 的每条边分成充分小的 N 段. 对每个 $i, j = 1, \cdots, N-1$, 记

$$p_{i,j} := pp_{i,0} \bigcap r_{0,j}q_{0,j}.$$

记 $\square_{ij}$ 是顶点为 $p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i+1,j+1}$ 和 $p_{i,j+1}$ 的定向矩形, 记 θ_{ij} 为在 $p_{i,j}$ 处的向量沿 $\square_{ij}$ 的平行移动所得到的定向夹角, 令 u_i, v_i 分别是与测地线 $p_{i,j}p_{i+1,j}$ 和 $p_{i,j}p_{i,j+1}$ 相切的 $p_{i,j}$ 处的单位向量. 若 α 是 u_i 和 v_i 的夹角, $a_i := d(p_{i,j}, p_{i+1,j})$, $b_i := d(p_{i,j}, p_{i,j+1})$, 则由 (1.3.5) 可得

$$-R(u_i, v_i)v_i = \frac{\theta_{i,j}}{a_i b_i}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)u_i + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)u_i^{\perp}\right\},$$

其中 $u_i^{\perp}$ 由 $v_i := u_i\cos\alpha + u_i^{\perp}\sin\alpha$ 定义. 由此得

$$G(p_{i,j})\text{Area}\square_{ij} = \theta_{ij}.$$

若 $\tau: T_qM \to T_qM$ 是沿 $\triangle$ 的平行移动, 则上面的关系式对所有 $i, j = 1, \cdots, N$ 求和, 并令 $N \to \infty$, 可得 $c(\triangle)$ 是由 τ 得到的定向角. 若 $w \in T_qM$ 与 qr 相切, 则 $\angle(\tau(w), w) = A + B + C - \pi$. 证毕.

引理 1.9.2 设 $D \subset M$ 是完全包含于凸球中的圆盘区域, 使得 ∂D 由极小测地线 pq, pr 和满足 $c(0) = q, c(l) = r$ 的单位速度光滑曲线 $c: [0, l] \to M$ 组成. 设 e 是沿 c 的单位内法向量场, $\boldsymbol{k}(s)$ 是 $c(s)$ 处的测地曲率向量. 假设对所有 $s \in (0, l)$, $pc(s)$ 所有内点在 D 中. 若 A, B, C 分别是 D 在 p, q, r 的内角, 则

$$c(D) + \int_0^l \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}\rangle(s)\mathrm{d}s = A + B + C - \pi.$$

证明 设 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = l$ 是 $[0, l]$ 的分割, 令 $p_i := c(s_i)$. 我们用折线测地线 $P_N := p_0p_1 \bigcup p_1p_2 \bigcup \cdots \bigcup p_{N-1,N}p_N$ 逼近 $c[0, l]$, 其中 $s_{i+1} - s_i < l/N$. 若 D_N 是以测地线 pq, pr, P_N 为边界的圆盘区域, 则 $\lim\limits_{N\to\infty} D_N = D$. 因此

$$c(D) = \lim_{N\to\infty} c(D_N).$$

若 ω_i 是 D_N 在 p_i 处的内角, $i = 1, \cdots, N-1$. 则由引理 1.8.1 得

$$c(D_N) = A + B + C - \pi + \sum_{i=1}^{N-1}(\omega_i - \pi).$$

对每个 $i = 1, \cdots, N-1$, 记 $\sigma_i: [0, 1] \to M$ 为极小测地线, 满足 $\sigma_i(0) = p_i$, $\sigma_i(1) = p_{i+1}$. 由于 c 光滑, 故对 $\tilde{s}_i \in (s_i, s_{i+1})$ 和 $i = 1, \cdots, N-1$, 存在点 $z_i = c(\tilde{s}_i)$ 满足以下性质. 若 $\gamma_{\pm}: [0, a_{\pm}] \to M$ 是满足 $\gamma_{\pm}(0) = c(\tilde{s}_i)$, $\gamma_+(a_+) = c(s_{i+1})$, $\gamma_-(a_-) = c(s_i)$ 的极小测地线, 则

$$\begin{aligned}&|\angle(\dot{\gamma}_+(a_+), \dot{\sigma}_i(1)) - \angle(\dot{\gamma}_+(0), \dot{c}(\tilde{s}_i))|\\&+|\angle(\dot{c}(\tilde{s}_i), -\dot{\gamma}_-(0)) - \angle(\dot{\sigma}_i(0), -\dot{\gamma}_i(a_-))|\\<\ &\text{Area}\{\triangle(c(s_i)c(\tilde{s}_i)c(s_{i+1}))\}\sup_D|G| < C(s_{i+1} - s_i)^2.\end{aligned}$$

这里 C 是仅依赖于集合 D 的正常数. 记 $\tau_x : TM|_{B(x,r(x))} \to T_xM$ 是从凸球 $B(x,r(x))$ 中的点到 T_xM 的极小测地线的平行移动. 则由 (1.3.3) 得

$$\frac{\| \tau_{z_i}(\dot{c}(s_{i+1})) - \dot{c}(\tilde{s}_i) \|}{s_{i+1} - \tilde{s}_i} = \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e} \rangle(\tilde{s}_i) + C(s_{i+1} - \tilde{s}_i)$$

且

$$\frac{\| \dot{c}(\tilde{s}_i) - \tau_{z_i}(\dot{c}(s_i)) \|}{\tilde{s}_i - s_i} = \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e} \rangle(\tilde{s}_i) + C(\tilde{s}_i - s_i).$$

因此, 由

$$\pi - \omega_{i+1} = \angle(\dot{\sigma}_{i+1}(0), \dot{c}(s_{i+1})) + \angle(\dot{c}(s_{i+1}), \dot{\sigma}_i(1)),$$

并且令 $N \to \infty$ 可得

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N-1} (\pi - \omega_i) = \int_0^l \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e} \rangle(s) \mathrm{d}s.$$

证毕.

注 1.9.1 可以证明在 $c(s)$ 附近的一个小邻域内 $M \setminus D$ 是严格凸的, 当且仅当 $\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e} \rangle(s) < 0$. 同样, D 是严格凸的当且仅当 $\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e} \rangle(s) > 0$.

Gauss-Bonnet 定理的证明 如引理 1.9.1 和 1.9.2 的方法将 $\Omega \subset M$ 划分为有限多个小测地三角形 $\triangle_1, \cdots, \triangle_l$ 和圆盘区域 $D_1, \cdots, D_m$, 使得 $\partial\Omega$ 的每个折点都是某个圆盘区域的顶点, 并且 $\partial\Omega$ 由所有圆盘区域的非测地边所覆盖. 这种分割可通过将 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 用有限多个小凸球覆盖所得到. 这些顶点由凸球的中心、$\partial\Omega$ 的折点和 $\partial\Omega$ 上有限多个光滑点得到.

若 k 是 $\partial\Omega$ 的分支的总数, v, e, f 分别是 Ω 的分割的顶点、边、面的总数, 则有

$$v - e + f = \chi(\Omega).$$

设 v_b 和 e_b 分别是 $\partial\Omega$ 的顶点和边的总数, 由于 $\partial\Omega$ 的每个分支是一个圆, 可知 $v_b = e_b$. 记 $v_i := v - v_b$, $e_i := e - e_b$, 可得

$$3f = e_b + 2e_i = v_b + 2e_i. \tag{1.9.6}$$

若 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 是在 $\partial\Omega$ 顶点处的不等于 π 的内角, 则由引理 1.9.1 和 1.9.2 得

$$\begin{aligned} c(\Omega) + \sum_{i=1}^{k} \oint_{c_i} \langle \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e} \rangle \mathrm{d}s &= \sum_{i=1}^{l} c(\triangle_i) + \sum_{j=1}^{m} c(D_j) + \sum_{i=1}^{k} \oint_{c_i} \langle \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e} \rangle \mathrm{d}s \\ &= 2\pi v_i + \pi(v_b - r) + \sum_{j=1}^{r} \omega_j - f\pi. \end{aligned}$$

由 $v_i := v - v_b = v - e_b$ 和 (1.9.6) 可证得 (1.9.3). 若 M 无边, 则 (1.9.4) 直接由 (1.9.3) 推得, 这就完成了证明. 证毕.

最后, 我们讨论 M 上一些特定连通紧致集上的 Gauss-Bonnet 定理. 若 $A \subset M$ 是具有如下性质的连通紧致集 (见图 1.9.1) :

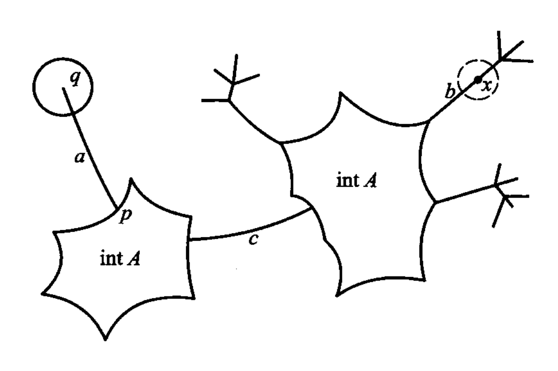


图 1.9.1

(a) int A 是有限多个区域的不交并集.

(b) $A \setminus$ int A 是分段光滑曲线的有限并集.

(c) 若 $A_\varepsilon \subset M$ 是 A 附近的 ε- 球, 则对所有充分小的 $\varepsilon > 0$, A_ε 的拓扑不变.

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, 递减序列 $\{A_\varepsilon\}$ 的极限为 A, A 的边界 ∂A 是 $M \setminus A$ 的完备化的边界. 若对充分小的 $\varepsilon > 0$, $x \in A$ 满足 $B(x,\varepsilon) \bigcap \text{int } A = \varnothing$, 并且 $B(x,\varepsilon) \setminus A$ 具有两个分支, 则 ∂A 上这样的点 x 视为二重点, $B(x,\varepsilon) \bigcap \partial A$ 为具有保持定向的二重曲线. 这样的 ∂A 称为 A 的良好边界, 或称 A 具有良好边界.

定理 1.9.1 (Gauss-Bonnet 定理) 若 $A \subset M$ 是具有良好边界 ∂A 的紧致集, 则

$$c(A) + \lambda(\partial A) = 2\pi\chi(A). \tag{1.9.7}$$

证明 首先, 由 ∂A 的假设知 $\lambda(\partial A)$ 存在, $\lambda(\partial A_\varepsilon)$ 存在, 并且对所有充分小的 $\varepsilon > 0$, $c(A_\varepsilon) + \lambda(\partial A_\varepsilon) = 2\pi\chi(A_\varepsilon)$. 若 b 是 ∂A 中通过点 $x \in A$ 的曲线, 使得对充分小的 $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \setminus b$ 具有两个分支, 则 b 在 x 附近的全测地曲率沿 ∂A_ε 被计两次相反的符号. 若 a 是 ∂A 中连接 p, q 的曲线, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, $B(q,\varepsilon) \setminus A$ 连通, 并且 p 是 $\partial\,\text{int}(A)$ 的正则点, 则 A_ε 在 p 处的两个外角之和为 $-\pi$, 并且 ∂A_ε 中 q 处沿半圆的测地曲率积分为 π. 若 c 是 ∂A 中连接 $\partial\,\text{int}(A)$ 上两点的曲线, ∂A 正则, 使得 int c 不与 ∂A 中其他曲线相交, 则 A_ε 在 c 的端点处的四个外角之和为 -2π. 归纳以上结果并令 $\varepsilon \to 0$, 即得所证结论. 证毕.

第二章 Cohn-Vossen 和 Huber 的经典结果

我们首先介绍 Cohn-Vossen 在 [19] 和 [20] 以及 Huber 在 [39] 中, 在更一般假设下用更简单方法得到的经典结果. 为此我们需要考虑无边区域上的曲率测度, 这样的区域不必是定向的, 并且可能不是紧致边界. 边界曲线可以是发散的, 因此需要一些限制条件. 我们的想法是考虑完备开曲面上的自然紧化, 在这样的曲面上成立 Gauss-Bonnet 定理. 我们将给出 $\mathbb{R}^3$ 中完备开曲面的全曲率的例子. 在这些例子中, 可以看到完备开曲面全曲率的几何特性.

§1 完备开曲面的全曲率

从现在开始, 令 M 是连通完备非紧的 2 维黎曼流形, 对其是否有分段光滑边界没有要求. 一般的, Gauss-Bonnet 定理在这样的 M 上不一定成立. 尽管如此, 考虑非紧曲面上的 Gauss-Bonne 定理仍是十分有意义的. 为此, 我们需要断定:

(1) 怎样定义 M 的 Euler 示性数.

(2) 怎样定义 M 上的曲率积分.

对于 (1), 我们需要考虑 M 的有限连通性.

定义 2.1.1 M 为有限连通的, 当且仅当存在紧致 2 维流形 N 和有限多个点 $p_1, \cdots, p_k \in N$, $k \geqslant 1$, 使得 M 同胚于 $N \setminus \{p_1, \cdots, p_k\}$. M 是无限连通的当且

仅当 M 不是有限连通的.

设 M 同胚于 $N\backslash\{p_1,\cdots,p_k\}$, 若 $p_1,\cdots,p_l\in \text{int}\,N$ 且 $p_{l+1},\cdots,p_k\in\partial N$, 则 M 的 Euler 示性数为

$$\chi(M):=\chi(N)-l. \tag{2.1.1}$$

在以上情形中, 我们称 M 有 k 个端点. 进而由 $\chi(\mathbb{S}^1)=0$ 可得

$$\chi(\partial M)=k-l,$$

其中 $\chi(\partial M)$ 是 ∂M 的无界分支的个数.

从现在起假设 M 是有限连通的. 由有限连通的定义, 无论 M 有无边界, 我们总是选取紧致集 $\Omega\subset M$, 使得

(1) ∂M 的所有紧致分支都包含在 $\text{int}\,\Omega$ 中.

(2) $\partial\Omega$ 是有限多条分段光滑简单闭曲线的不交并集.

(3) $M\setminus\Omega$ 具有 l 个管 (或半柱面) 和 $k-l$ 个半平面.

定义 2.1.2 紧致集 $\Omega\subset M$ 称为 M 的柱心, 当且仅当 Ω 满足以上的 (1)、(2)、(3).

显然 M 有一个柱心的单调递增序列 $\{C_i\}$ 穷竭 M. 所有的 C_i 相互同胚, 并且对所有的 i,

$$\chi(M)=\chi(C_i). \tag{2.1.2}$$

对本节开始时的第 (2) 条, 我们已经定义了 M 的全曲率和 ∂M 的全测地曲率. 如下给出的完备开 2 维流形 M 的全曲率的定义并没有要求有限连通性.

定义 2.1.3 取 M 的柱心的递增序列 $\{C_i\}$ 穷竭 M, 定义 M 的全曲率 $c(M)$ 为

$$c(M):=\lim_{i\to\infty}c(C_i). \tag{2.1.3}$$

全曲率 $c(M)$ 存在当且仅当反常积分 $\int_M G\mathrm{d}M$ 在 $[-\infty,\infty]$ 内存在, 即 $c(M)$ 存在当且仅当

$$\int_M G_+\mathrm{d}M<\infty$$

或

$$\int_M G_-\mathrm{d}M<\infty,$$

其中 $G_+:=\max\{G,0\}$, $G_-:=G_+-G$. 若 $c(M)$ 有限, 则对每个 $\varepsilon>0$ 存在 $i(\varepsilon)$, 使得对所有 $i>i(\varepsilon)$,

$$|\,c(M)-c(C_i)\,|<\varepsilon, \tag{2.1.4}$$

特别地, 对所有 $i > i(\varepsilon)$,

$$\int_{M\setminus C_i} |G| \mathrm{d}M < \varepsilon. \tag{2.1.5}$$

若 $c(M) = -\infty$, 则对所有 $i > i(\varepsilon)$ 有

$$\int_{M\setminus C_i} G_+ \mathrm{d}M < \varepsilon. \tag{2.1.6}$$

以下将讨论 M 的边界条件. M 的边界可以包含一条发散曲线; 这里称曲线 $c:[0,1) \longrightarrow M$ 为发散 (或正则) 曲线当且仅当对每个紧致集 A, 存在 $t_A \in (0,1)$, 使得 $c(t_A, 1) \subset M \setminus A$. 若 $c: \mathbb{R} \longrightarrow \partial M$ 为非闭边界曲线, 则 $c|_{(-\infty,0]}$ 和 $c|_{[0,\infty)}$ 均为发散的. 对于 ∂M 的分割点 $x_i \in \partial M$, ∂M 在 x_i 处的内角记为 $\omega_i \in (0, 2\pi)$. 设 $\boldsymbol{e}$ 为 ∂M 的单位内法向量, $\boldsymbol{k}$ 为 ∂M 的测地曲率向量. 设 $\{I_j\}$ 是 ∂M 的紧致集组成的单调递增序列, 满足 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j = \partial M$. 用这些记号, ∂M 的全测地曲率可以如下定义. ∂M 的全测地曲率 $\lambda(\partial M) \in [-\infty, +\infty]$ 有定义当且仅当

$$\lambda(\partial M) := \lim_{j\to\infty} \lambda(I_j) \tag{2.1.7}$$

存在且不依赖于 $\{I_j\}$ 的选择.

注 2.1.1 设 M 如同以前一样具有 k 个端点, 则 $M\setminus C_i$ 具有 l 个管和 $k-l$ 个半平面, 这些半平面具有发散边界曲线 $c_{l+1}, \cdots, c_k$. 若 $|\lambda(\partial M)| < \infty$, 则对所有 $\lambda(c_{l+1}), \cdots, \lambda(c_k)$ 也成立. 若 $\lambda(\partial M) = \infty$, 则 $\lambda(c_j) > -\infty$, $j = l+1, \cdots, k$, 并且若 $\lambda(\partial M) = -\infty$, 则 $\lambda(c_j) < \infty$, $j = l+1, \cdots, k$.

以下给出一些全曲率的例子.

设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是无边完备非紧曲面, M 的全曲率可由如下的 Gauss 正规映射 $v: M \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ 得到. 设 $D := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2\}$ 是一个区域, $X: D \longrightarrow M$ 为 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的局部表示. 记 $X_i := \mathrm{d}X(\partial/\partial u^i)$, 则有 $g_{ij} = X_i \cdot X_j$, $i, j = 1, 2$. M 的面积元为

$$\mathrm{d}M = \| X_1 \times X_2 \| \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2.$$

设 $\boldsymbol{n}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中 M 的单位法向量场. 则对 $p \in M$, $v(p)$ 是将 $n(p)$ 平行移动到 $\mathbb{R}^3$ 的原点得到的. 结构方程为

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^k X_k + h_{ij}\boldsymbol{n}, \qquad i, j = 1, 2,$$
$$\boldsymbol{n}_i = -h_{ij} g^{jk} X_k, \qquad i = 1, 2,$$

其中 $X_{ij} = \partial^2 X/(\partial u^i \partial u^j)$, $\boldsymbol{n}_i = \partial \boldsymbol{n}/\partial u^i$, h_{ij} 是 M 的第二基本张量的系数. 则有

$$\det \mathrm{d}v = \| \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \| = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} \| X_1 \times X_2 \|.$$

若 $\mathrm{d}\Sigma$ 是 $\mathbb{S}^2(1)$ 的面积元, 则由以上讨论得 $v^*\mathrm{d}\Sigma = K\mathrm{d}M$. 因此

$$c(M) = \int_M G\mathrm{d}M = \int_{v(M)} \mathrm{d}\Sigma. \tag{2.1.8}$$

这一关系可以用来求 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的全曲率.

例 2.1.1 对平面 $M = \mathbb{R}^2$ 有 $c(M) = 0$.

例 2.1.2 对双曲平面 $M = H^2(-c^2)$ 有 $c(M) = -\infty$.

例 2.1.3 (旋转抛物面) 设 k 为正常数, 由抛物线 $y = kx^2/2$ 生成的旋转曲面为

$$M = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, kr^2/2) \in \mathbb{R}^3; r > 0, 0 < \theta \leqslant 2\pi\}.$$

记 $u^1 := r$, $u^2 := \theta$, 则 $\mathrm{d}s^2 = (1 + k^2r^2)(\mathrm{d}u^1)^2 + r^2(\mathrm{d}u^2)^2$, 且

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0,$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{-r}{1 + k^2r^2}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{k^2r}{1 + k^2r^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}.$$

因此有

$$R^1_{212} = \frac{-k^2r^2}{(1 + k^2r^2)^2},$$

于是

$$G = \frac{k^2}{(1 + k^2r^2)^2}.$$

显然 $v(M)$ 覆盖了 $\mathbb{S}^2(1)$ 的北半球. 同样, 由直接计算可得

$$c(M) = \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{k^2r}{(1 + k^2r^2)^{3/2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

例 2.1.4 (双叶双曲面) 对于双叶双曲面 $M = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{k^2r^2 + 1}) \in \mathbb{R}^3; r > 0, 0 < \theta \leqslant 2\pi\}$ 的一个分支, 有

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{k^2(k^2 + 1)r^2 + 1}{k^2r^2 + 1}(\mathrm{d}u^1)^2 + r^2(\mathrm{d}u^2)^2,$$

其中 $u^1 := r$, $u^2 := \theta$, 并且

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r},$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{k^4r}{(k^2r^2 + 1)(k^2(k^2 + 1)r^2 + 1)}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{-r(k^2r^2 + 1)}{k^2(k^2 + 1)r^2 + 1}.$$

因此有

$$R^1_{212} = \frac{-k^4r^2}{(k^2(k^2 + 1)r^2 + 1)^2},$$

且

$$K=\frac{k^4}{(k^2(k^2+1)r^2+1)^2}.$$

若记 $\tan\varphi=k$, 则 $v(M)$ 为北极附近的 φ- 球, 因而 $c(M)=2\pi(1-\cos\varphi)$. 这也可以通过直接计算得到:

$$\begin{aligned}
c(M)&=\lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{k^4r}{(k^2(k^2+1)r^2+1)^{3/2}(1+k^2r^2)^{1/2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=2\pi k^2\sqrt{\frac{1+k^2r^2}{k^2(k^2+1)r^2+1}}\Bigg|_0^\infty\\
&=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)=2\pi(1-\cos\varphi).
\end{aligned}$$

例 2.1.5 (单叶双曲面)　记 $f(t):=\sqrt{1+k^2t^2}$, 单叶双曲面为

$$M=\{(f(t)\cos\theta,f(t)\sin\theta,t)\in\mathbb{R}^3;t\in\mathbb{R},0<\theta\leqslant2\pi\}.$$

则

$$\mathrm{d}s^2=\frac{k^2(k^2+1)t^2+1}{k^2t^2+1}(\mathrm{d}u^1)^2+(k^2t^2+1)(\mathrm{d}u^2)^2,$$

且

$$\begin{gathered}
\Gamma_{12}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{22}^2=0,\\
\Gamma_{22}^1=\frac{-k^2t(k^2t^2+1)}{k^2(k^2+1)t^2+1},\quad\Gamma_{12}^2=\frac{k^2t}{k^2t^2+1},\\
\Gamma_{11}^1=\frac{k^4t}{(k^2(k^2+1)t^2+1)(k^2t^2+1)}.
\end{gathered}$$

由此可得

$$R_{212}^1=\frac{k^2(k^2t^2+1)}{(k^2(k^2+1)t^2+1)^2}$$

且

$$G=\frac{-k^2}{(k^2(k^2+1)t^2+1)^2}.$$

记 $\tan\varphi:=k$, $\varphi\in(0,\pi/2)$, 则 $v(M)$ 中去掉了 $\mathbb{S}^2(1)$ 北极和南极附近的 $(\pi/2-\varphi)$-球, 因此 $c(M)=-4\pi\sin\varphi$. 同样直接计算得

$$\begin{aligned}
c(M)&=\lim_{t\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-t}^t\frac{-k^2}{(k^2(k^2+1)t^2+1)^{3/2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\\
&=-4\pi\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}=-4\pi\sin\varphi.
\end{aligned}$$

§2 Cohn-Vossen 和 Huber 的经典定理

以下将在更一般的假设下给出 Cohn-Vossen 的著名定理. 我们将证明 Huber 定理可以直接由 Cohn-Vossen 定理导出.

定理 2.2.1 (与 [19] 中 Satz 6, [39] 中的定理 10 和 [93] 的 3.4 节对比) 设 M 是连通的完备非紧有限连通的 2 维黎曼流形. 若 M 具有全曲率 $c(M)$, ∂M 具有全测地曲率, 并且 $c(M) = -\lambda(\partial M) = \pm\infty$ 不成立, 则

$$2\pi\chi(M) - (c(M) + \lambda(\partial M)) \geqslant \pi\chi(\partial M). \tag{2.2.1}$$

定理 2.2.2 (Huber [39]) 若 M 是连通的完备无边且无限连通的 2 维黎曼流形, 并且具有全曲率 $c(M)$, 则

$$c(M) = -\infty. \tag{2.2.2}$$

本节将用到以下特定测地线的定义.

定义 2.2.1 单位速度测地线 $\gamma: [0,\infty) \longrightarrow M$ 称为从紧致集 A 出发的射线, 当且仅当对所有 $s \geqslant 0$, $d(\gamma(s), A) = s$. 单位速度测地线 $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ 称为直线, 当且仅当对所有 $s,t \in \mathbb{R}$, $d(\gamma(s),\gamma(t)) = \mid s-t \mid$.

注意到若 $\partial M = \varnothing$ 则从 M 的每个点出发至少有一条射线, 并且若 M 具有多于一个端, 则 M 容许一条直线.

设 $H \subset M$ 是半平面并且它的边界曲线 $c: \mathbb{R} \longrightarrow \partial H$ 容许全测地曲率. H 的内部距离 ρ_H 由 M 的内部距离给出:

$$\rho_H(x,y) := \inf\{L(c) : c \text{ 是 } H \text{ 中连接 } x \text{ 和 } y \text{ 的曲线}\}.$$

由长度递减形变可得对每一对点 $x, y \in H$ 可以由 H 中长度为内部距离 $\rho_H(x,y)$ 的曲线 γ 相连接. 这样的曲线称为 H 中连接 x 和 y 的线段. 单位速度曲线 $\gamma: [0,\infty) \longrightarrow H$ 称为 ρ_H- 射线, 当且仅当它的每段子弧都在 H 中. 类似地可以定义 ρ_H- 直线. 以下的命题 2.2.1 是最短路径原理的直接推论. 证明留给读者.

命题 2.2.1 设 $H \subset M$ 是半平面, 它的边界曲线具有全测地曲率. 若 $\gamma: [0,a] \longrightarrow H$ 是 H 中的单位速度线段, 则以下结论成立:

(1) $\gamma[0,a] \bigcap \operatorname{int} H$ 的每个分支是 M 中的测地线.

(2) 若 γ 的测地曲率向量 $\boldsymbol{k}(s_0)$ 在 γ 的内点 $\gamma(s_0)$ 处存在, 且 $\gamma(s_0) \in \partial H$, 则

$$\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}\rangle(s_0) \leqslant 0.$$

(3) 若 γ 的测地曲率向量在内点 $\gamma(s_0)$ 处不存在, 且 $\gamma(s_0) \in \partial H$, 则 $-\lim\limits_{s\uparrow s_0} \dot\gamma(s)$ 和 $\lim\limits_{s\downarrow s_0} \dot\gamma(s)$ 所夹的内角不小于 π.

(4) H 中的每个线段, ρ_H- 射线和 ρ_H- 直线都容许全测地曲率.

设 $c:\mathbb{R}\longrightarrow\partial H$ 是 H 的边界曲线, 且 $\rho_c:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 定义为

$$\rho_c(s):=\rho_H(c(-s),c(s)),\quad s\geqslant 0.$$

显然 ρ_c 为 Lipschitz 连续的, Lipschitz 常数为 2, 因而 ρ_c 几乎处处可微. 对每个 $s\geqslant 0$, 设 γ_s 为 H 中连接 $c(-s)$ 和 $c(s)$ 的一条线段. 对 $s>0$, 设 $A_s\subset H$ 是具有良好边界 $\gamma_s\bigcup c[-s,s]$ 的紧致集. 若 γ_s 在其内点处不与 ∂H 相交, 则 A_s 为 2 维闭圆盘区域. 若 γ_s 在内点处与 ∂H 相交, 则 int A_s 有至多可数个圆盘区域. 更进一步, 对充分小的 ε, H 中 A_s 处的 ε- 球是圆盘区域. 由 Gauss-Bonnet 定理 1.9.1 知

$$c(A_s)+\lambda(\partial A_s)=2\pi.$$

并且若 γ_s 的全测地曲率由 $A_s\subset H$ 确定, 则由命题 2.2.1 可知 γ_s 关于 A_s 是凸的, 且

$$\lambda(\gamma_s)\geqslant 0.$$

采用以上的符号, 我们来证明

引理 2.2.1 若对 $s\geqslant 0$, $\alpha(s)$ 和 $\beta(s)$ 都是紧致集 $A_s\subset H$ 中在 $c(-s)$ 和 $c(s)$ 处的内角, 并且 A_s 具有良好边界 $\gamma_s\bigcup c[-s,s]$, 则

$$\liminf_{s\to\infty}(\alpha(s)+\beta(s))\leqslant\pi, \tag{2.2.3}$$

且

$$\limsup_{s\to\infty}\rho_c'(s)\geqslant 0. \tag{2.2.4}$$

证明 由第一变分公式可知, 若 ρ_c 在 s 处可微, 则

$$\frac{\mathrm{d}\rho_c(s)}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha(s)+\cos\beta(s). \tag{2.2.5}$$

假设 (2.2.4) 式不成立, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\limsup\limits_{s\to\infty}\rho_c'(s)\leqslant-\varepsilon$. 可以选取充分大的 s_0, 使得对所有 $s\geqslant s_0$, 有 $\rho_c'(s)\leqslant-\varepsilon/2$. 则由

$$\rho_c(s_1)-\rho_c(s_0)=\int_{s_0}^{s_1}\rho_c'(s)\mathrm{d}s,\quad s_1>s_0$$

可得

$$\rho_c(s_0)\geqslant\rho_c(s_1)+\frac{\varepsilon}{2}(s_1-s_0)>\frac{\varepsilon}{2}(s_1-s_0).$$

因而对充分大的 $s_1>s_0$ 得到矛盾. 进而由 (2.2.4) 和 (2.2.5) 可以得到结果. 证毕.

引理 2.2.2 (见 [93] 中命题 3.4.2) 设 $H \subset M$ 是容许 $c(H)$ 和 $\lambda(\partial H)$ 的半平面, 若 $c(H) = -\lambda(\partial H) = \pm\infty$ 不成立, 则

$$c(H) + \lambda(\partial H) \leqslant \pi\chi(\partial H) = \pi. \tag{2.2.6}$$

证明 设 $c : \mathbb{R} \longrightarrow \partial H$ 是单位速度边界曲线. 对于单调发散且满足 $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = \infty$ 的正数序列 $\{s_i\}$, 选取穷竭 M 的柱心的单调递增序列 $\{C_i\}$, 使得对每个 i, $\partial C_i \bigcap H$ 是连接 $c(-s_i)$ 和 $c(s_i)$ 的分段光滑曲线. 设 $\{\varepsilon_i\}$ 是收敛于 0 的严格递减正数序列. 由引理 2.2.1 知, 对每个 $i = 1, \cdots$, 可以找到充分大的 $s_i' > s_i$ 和 $H \backslash C_i$ 中连接 $c(-s_i')$ 和 $c(s_i')$ 的线段 γ_i, 使得 $c[-s_i', s_i'] \bigcup \gamma_i$ 组成紧致可缩集 $A_i \subset H$ 的良好边界. 若 α_i 和 β_i 分别为 A_i 在 $c(-s_i')$ 和 $c(s_i')$ 处的内角, 则对所有i,

$$\alpha_i + \beta_i \leqslant \pi + \varepsilon_i. \tag{2.2.7}$$

进而由 Gauss-Bonnet 定理 1.9.1 知对所有i,

$$c(A_i) + \lambda(\partial A_i) = 2\pi.$$

注意到

$$\lambda(\partial A_i) = \lambda(c\,|_{[-s_i', s_i']}) + 2\pi - \alpha_i - \beta_i + \lambda(\gamma_i). \tag{2.2.8}$$

由于 γ_i 关于 A_i 是凸的, 故有 $\lambda(\gamma_i) \geqslant 0$, 且

$$c(A_i) + \lambda(c\,|_{[-s_i', s_i']}) \leqslant \alpha_i + \beta_i. \tag{2.2.9}$$

因为 $\lim\limits_{i\to\infty} c(A_i) = c(H)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda(c\,|_{[-s_i', s_i']}) = \lambda(\partial H)$, 并且 $c(H) = -\lambda(\partial H) = \pm\infty$ 不成立, 可知 (2.2.9) 式左边当 $i \to \infty$ 时的极限在 $[-\infty, \pi]$ 上存在. 这就证明了引理 2.2.2. 证毕.

推论 2.2.1 (对照 [20] 中的 Satz 1 和 Satz 2) 在引理 2.2.2 假设的基础上, 若 ρ_c 有上界, 则

$$c(H) + \lambda(\partial H) = \pi\chi(\partial H). \tag{2.2.10}$$

进而, 若对常数 $L > 0$ 和所有充分大的 s, 有 $\rho_c(s) \geqslant 2s - L$, 则

$$c(H) + \lambda(\partial H) \leqslant 0. \tag{2.2.11}$$

证明 若 ρ_c 有上界, 则存在满足 $\lim\limits_{j\to\infty} s_j = \infty$ 的单调发散序列 $\{s_j\}$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} \rho_c'(s_j) = 0,$$

这证明了 (2.2.10). 若 $\rho_c(s) \geqslant 2s - L$, 则 $\limsup\limits_{s\to\infty} \rho_c'(s) = 2$. 特别地, 存在满足 $\lim\limits_{j\to\infty} s_j = \infty$ 的单调发散序列 $\{s_j\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} (\alpha(s_j) + \beta(s_j)) = 0$. 这就证明了 (2.2.11). 证毕.

引理 2.2.3 (见 [93] 中命题 3.4.3) 设 $U \subset M$ 是边界为分段光滑圆周的半柱面. 若 $c(U)$ 存在, 则

$$c(U) + \lambda(\partial U) \leqslant \pi\chi(\partial U) = 0.$$

证明 设 $\widetilde{U}$ 是从 ∂U 沿测地射线 $\gamma : [0, \infty) \to U$ 切割开集 U 得到的半平面, 并且 $\pi : \widetilde{U} \to U$ 是黎曼覆盖投影. 设 $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2 : [0, \infty) \to \partial\widetilde{U}$ 是 γ 的提升像. 则 $\widetilde{\gamma}_1[0, \infty) \bigcup \pi^{-1}(\partial U) \bigcup \widetilde{\gamma}_2[0, \infty)$ 构成 $\widetilde{U}$ 的边界, 并且 $\lambda(\partial\widetilde{U})$ 有限. 由引理 2.2.2 知 $c(\widetilde{U}) + \lambda(\partial\widetilde{U}) \leqslant \pi$, 若 α, β 为 $\widetilde{\gamma}_1(0)$ 和 $\widetilde{\gamma}_2(0)$ 处 $\widetilde{U}$ 的内角, 则由 $\widetilde{U}$ 的构造知

$$\lambda(\partial\widetilde{U}) - \lambda(\partial U) = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) - (\pi - (\alpha + \beta)) = \pi.$$

证毕.

例 2.2.1 设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是类似于例 2.1.3 由抛物线生成的旋转曲面, 记 $U := \{p \in M; r(p) \geqslant 1\}$, $D := \{p \in M; r(p) \leqslant 1\}$. 则 M 的平行 r- 圆 $S(r)$ 具有正常测地曲率 κ_r, 满足 $\lim\limits_{r\to\infty} \kappa_r = 0$, 且长度为 $2\pi r$. 由于 $c(M) = 2\pi$, 可得 $\lim\limits_{r\to\infty} 2\pi r\kappa_r = 0$. U 的万有黎曼覆盖 H 满足 $c(H) = -\lambda(\partial H) = \infty$. (2.2.9) 左边当 $i \to \infty$ 时的极限依赖于 $\{A_i\}$ 的选择. 任意给定 $\alpha > \pi$, 给定单调递增正数序列 $\{\theta_i\}$ 满足 $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i = \infty$. 对于这些常数我们选择递增正数序列 $\{r_i\}$, 使得 $S(r_i)$ 的测地曲率为 $(\alpha - \pi)/(2r_i\theta_i)$. 对每个 i, 设紧致集 $C_i \subset H$ 满足 $C_i := \{p \in H; 1 \leqslant r(p) \leqslant r_i, -\theta_i \leqslant \theta(p) \leqslant \theta_i\}$, 并记 $\gamma_i := \partial C_i \setminus \partial H$. 则 $\{C_i\}$ 严格递增且 $\bigcup\limits_i C_i = H$. 进而, 对每个 i, γ_i 关于 C_i 是凸的, 且 $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$. 因此对所有的 i, $\lambda(\gamma_i) = \alpha$, 因而 (2.2.9) 左边的极限不存在.

例 2.2.2 设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是例 2.1.4 中所述的双叶双曲面. 则每个平行 r- 圆 $S(r)$ 具有正常测地曲率 κ_r, 且 κ_r 满足

$$\lim_{r\to\infty} \kappa_r = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} 2\pi r\kappa_r = 2\pi \sin\theta.$$

若 $U := \{p \in M; r(p) \geqslant 1\}$, 且 H 是 U 的万有黎曼覆盖, 则 $c(H) = -\lambda(\partial H) = \infty$. 若 D_i 是穷竭 H 的局部凸圆盘区域上的单调递增序列, 则 $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda(\partial D_i) = -\infty$, 因此我们有 $\lim\limits_{i\to\infty} c(D_i) + \lambda(\partial D_i) = \infty$. 我们略过了 $c(H) = -\lambda(\partial H) = \infty$ 的情形, 因为稍后关于紧性的讨论不是用通常的方法得到的.

定理 2.2.1 的证明 若 M 的柱心 $\Omega \subset M$, 使得 $M \setminus \Omega$ 由 l 个管和 $k - l$ 个半平面组成. 令 $U_1, \cdots, U_l$ 和 $H_{l+1}, \cdots, H_k$ 分别是 $M \setminus \Omega$ 中所有的管和所有的半平面. 不失一般性, 可以假设 Ω 满足, 若对于 $j = l + 1, \cdots, k$, c_j 是 $\partial\Omega$ 的分支与 ∂H_j 的交点, 则 c_j 的两个隅角 $c_j \bigcap \partial H_j \bigcap \partial M$ 是 ∂M 的光滑点. 若 α_j, β_j

是这些隅角关于 Ω 的内角, 则 c_j 关于 Ω 的全测地曲率满足

$$\lambda(c_j) = \lambda(c_j \bigcap \partial M) + (\pi - \alpha_j) + (\pi - \beta_j) + \lambda(c_j \bigcap \partial H_j),$$

其中 e 取为关于 Ω 的内法向量. 因此我们得

$$\lambda(\partial\Omega) = \sum_{i=1}^{l} -\lambda(\partial U_i) + \sum_{j=l+1}^{k} (\lambda(c_j \bigcap \partial M) + \lambda(c_j \bigcap \partial H_j) + 2\pi - \alpha_j - \beta_j).$$

由 Gauss-Bonnet 定理 1.9.1 和引理 2.2.2, 2.2.3 可得

$$c(\Omega) + \lambda(\partial\Omega) = 2\pi\chi(M),$$

$$\sum_{i=1}^{l}(c(U_i) + \lambda(\partial U_i)) \leqslant 0,$$

$$\sum_{j=l+1}^{k} (c(H_j) + \lambda(\partial H_j)) \leqslant (k-l)\pi,$$

其中

$$\lambda(\partial H_j) = -\lambda(c_j \bigcap \partial H_j) + \lambda(\partial H_j \bigcap \partial M) + \alpha_j + \beta_j.$$

这就证明了定理 2.2.1. 证毕.

注 2.2.1 我们注意到, 在定理 2.2.1 中, $2\pi\chi(M) - \{c(M) + \lambda(\partial M)\}$ 不依赖于黎曼度量在任意紧致集上的变化. 设 M 满足定理 2.2.1 中假设. 消去 ∂M 的所有紧致分支, 我们可以由 M 构造一个新的曲面 M_1, 使得 M_1 在一个紧致集外与 M 重合. 即∂M_1 具有 $k-l$ 个分支, 它们都是发散曲线, 并且 M_1 具有 l 个管. 这样的 M_1 可以通过将圆盘区域粘合到 ∂M_0 的每一个分支得到. 设 g_1 是 M_1 上的完备黎曼度量, 使得对某个 $i \geqslant 1$, 在 $M \setminus C_i$ 上有 $g = g_1$. 由本注的开头可知

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(M) - (c(M) + \lambda(\partial M)) &= 2\pi\chi(M_1) - (c(M_1) + \lambda(\partial M_1)) \\ &\geqslant \pi\chi(\partial M_1), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

其中 $\chi(\partial M_1) = \chi(\partial M)$ 是 ∂M_1 的 (无界) 分支的个数. 由这一事实, 我们只要考虑 ∂M 的非紧分支.

定理 2.2.1 有许多推论, 正如 [19] 和 [20] 中所述, 下面将给出:

推论 2.2.2 (与 [19] 中 Satz 7, [39] 中定理 11 对照) 在定理 2.2.1 假设的基础上, 若 $M \setminus \Omega$ 的每个半平面 H 满足 $\rho_H : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ 有上界, 则

$$c(M) + \lambda(\partial M) = 2\pi\chi(M),$$

其中每个管沿从 Ω 发出的射线剪开.

推论 2.2.3 (Satz 8, [19]) 若完备无边 2 维黎曼流形 M 处处具有正的 Gauss 曲率, 则 M 微分同胚于球面, 实射影平面, 或平面.

推论 2.2.4 (Satz 10, [19]) 若 M 同胚于一个平面 (这样的 M 称为黎曼平面), 并且处处 $G > 0$, 则 M 没有闭测地线 (不论有没有自交点).

推论 2.2.5 (Satz 5, [20]) 若黎曼平面 M 上存在直线, 并且 $c(M)$ 存在, 则

$$c(M) \leqslant 0.$$

特别地, 若在 M 上处处有 $G \geqslant 0$, 则 M 等距于平面 $\mathbb{R}^2$.

Huber 指出 Gauss-Bonnet 定理对具有有限全面积的完备非紧 2 维黎曼流形成立.

定理 2.2.3 (见 [39] 中定理 12 和 [82] 中推论) 设 M 是有限连通的完备非紧 2 维黎曼流形, 并且具有有限全面积. 若 M 具有全曲率, 则

$$c(M) = 2\pi\chi(M).$$

定理 2.2.3 可以在充分大的度量球上的 Bonnesen 型等周不等式中给出 (见第 5 章).

练习 2.2.1 证明推论 2.2.2 ~ 2.2.5.

Gromoll 与 Meyer 在 [30] 中将推论 2.2.3 推广到高维情形. 他们证明, 在每一点处具有正截曲率的完备非紧无边 n 维黎曼流形微分同胚于 $\mathbb{R}^n$. Cheeger 和 Gromoll 在 [17] 中证明了具有非负截曲率的完备非紧无边 n 维黎曼流形具有紧致全测地子流形 $\mathcal{S}$, 使得 M 微分同胚于 $\mathcal{S}$ 在 M 中的法丛.

Toponogov 在 [103] 中对推论 2.2.5 作了如下推广: 若具有非负截曲率的完备无边 n 维黎曼流形具有 k 条无关的直线, 则 M 等距分裂为黎曼积 $N \times \mathbb{R}^k$, 其中 N 为具有非负截曲率的全测地子流形, 并且 N 中不容许直线. Alexandrov-Toponogov 三角比较定理在这些推广的证明中起了关键作用.

为了证明定理 2.2.2, 我们需要以下关于非紧流形上 Morse 穷竭函数存在性的引理.

引理 2.2.4 设 M 为 n 维连通非紧的无边流形. 存在 Morse 函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 使得对每个 $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty, a]$ 紧致, 并且若 $p_0, \cdots, p_m, \cdots$ 都是 f 的临界点, 则对所有的 i, $f(p_i) = i$.

证明 由 Whitney 浸入定理, 可以选取正则嵌入 $E : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$, 使得 $E(M) \subset V := \left\{ q \in \mathbb{R}^{2n+1}; \sum_{i=1}^{2n} (q^i)^2 < 1, q^{2n+1} \geqslant 0 \right\}$. 设 $v := (0, \cdots, 0, 1)$, 并选取

满足 $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$ 的单调发散序列 $\{t_j\}$, 使得对每个 j, t_j 是 v 中高度函数的正则值. 记 $V_j := \{q \in V; t_{j-1} \leqslant q^{2n+1} \leqslant t_j\}$. E 的 Gauss 法映射的 Sard 定理指出, 若 $M_j \subset M$ 是满足 $E(M_j) = E(M) \bigcap V_j$ 的子流形, 则存在单位向量序列 $\{v_j\}$, 使得每个 v_j 落在充分接近于 v 的范围内, 并且 v_j 的距离函数 h_j 在 M_j 中没有退化临界点. 显然 h_j 的梯度向量场横截 ∂M_j, 因此对每个 j, 存在充分小的正数 η_j, 使得 h_j 在 $O_j := \{p \in E(M); p^{2n+1} \in (t_{j-1} - \eta_j, t_{j-1} + \eta_j) \bigcup (t_j - \eta_j, t_j + \eta_j)\}$ 上没有临界点. 记 $W_j := V_j \bigcup O_j$, $Y_j := V_j \setminus \overline{O}_j$, 取从属于 $\{W_j\}$ 的 $\{\varphi_j\}$ 的单位分割, 使得在 Y_j 上 $\varphi_j = 1$, $\mathrm{supp}\,\varphi_j \subset W_j$. 则 $h := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j h_j$ 是定义良好的 Morse 函数, 并且在 $\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ 上没有临界点, 由 h 不难构造所需的 f, 证得引理 2.2.4. 证毕.

定理 2.2.2 的证明 设 $f: M \to \mathbb{R}$ 是以上引理中得到的 Morse 穷竭函数, $\{t_j\}$ 是 f 的正则值组成的单调递增序列, 并且 $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$. 对每个 j, 水平子集 $\widehat{M}_j := f^{-1}(-\infty, t_j]$ 具有由有限个圆的并集构成的边界. 则 $f^{-1}[t_j, \infty)$ 由紧致曲面、管和非管的非紧曲面的有限并组成. 设 M_j 是 $\widehat{M}_j$ 和 $f^{-1}[t_j, \infty)$ 中的所有紧致曲面和管的并集 (见图 2.2.1). 则可知对每个 j, M_j 是有限连通非紧 (或紧) 的具有紧致边界的连通曲面, 然后选取具有以下性质的 $\{M_j\}$ 的子序列 $\{M_k\}$ (见图 2.2.1):

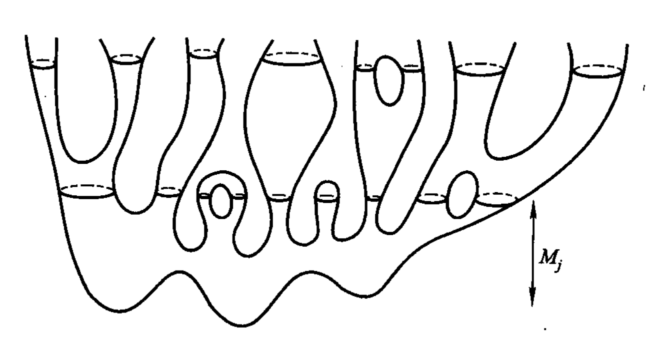


图 2.2.1 子流形 M_j 由图中所示垂直区域中的曲面组成

(1) $\{M_k\}$ 严格递增且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = M$.

(2) $\{\chi(M_k)\}$ 严格递减.

(3) 对每个 k, ∂M_k 是圆的有限并.

对任意选定的 $k > 1$, 可如下将 ∂M_k 替换为简单闭测地线. 设 $c_{k,1}, \cdots, c_{k,m}$ 为 ∂M_k 中的简单闭曲线. 由于每个 $c_{k,i}$ 是 $f^{-1}[t_k, \infty)$ 的一个非管的无界分支的边界, 故对每个 $i = 1, \cdots, m$, 存在一个闭的非零同伦曲线 $b_i \subset M$, 使得若 c 是

自由同伦于 $c_{k,i}$ 的闭曲线, 则 $b_i \bigcap c \neq \varnothing$. 一个长度递减形变可以应用于每个 $c_{k,i}$ 以得到简单闭测地线 $\sigma_{k,i}$, 且其长度在所有自由同伦于 $c_{k,i}$ 的闭曲线中是最小的. 因此 M_k 的边界曲线可以由简单闭测地线 $\sigma_{k,1}, \cdots, \sigma_{k,m}$ 替换, 因此可以考虑 $\partial M_k = \sigma_{k,1} \bigcup \cdots \bigcup \sigma_{k,m}$. 应用定理 2.2.1 于每个 M_k, 得到 $c(M_k) \leqslant 2\pi\chi(M_k)$, 定理 2.2.2 得证. 证毕.

练习 2.2.2 设 M 为无限连通、具有非空边界的2维连通完备黎曼流形. 若 $c(M)$ 与 $\lambda(\partial M)$ 存在, 并使 $c(M) = -\lambda(\partial M) = \infty$ 不成立, 则 Huber 定理是否成立?

§3 黎曼平面上测地线的特殊性质

我们将介绍测地线整体性态的一些有趣的结论, 这些结论在 [20] 中给出了证明. 在本节假设 M 是黎曼平面. M 称为黎曼平面, 当且仅当它与 $\mathbb{R}^2$ 同胚. 本节将讨论 M 上的极点, 简单点和测地线上的特殊性质.

一条测地线称为完备测地线, 当且仅当它定义在整个实数轴上. 测地线 $\gamma: [a,b] \to M$ 称为测地回路, 当且仅当 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 并且 $\gamma|_{[a,b)}$ 为单射. 点 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 称为回路的基点.

定义 2.3.1 点 $p \in M$ 称为简单点, 当且仅当它不是任何测地回路的基点. 定义如下的集合:

$\mathcal{S}_0 := \{p \in M; p\text{为}M\text{中的简单点}\}$;

$\mathcal{S}_1 := \{q \in M; \text{没有测地回路经过 } q\}$;

$\mathcal{P} := \{q \in M; q\text{不是任何非平凡测地双角的隅角}\}$.

由定义知

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0.$$

在定理 2.3.7 中将证明 $\mathcal{P}$ 上的每个点 q 都满足 $\exp_q: T_qM \to M$ 是单射. 这样的点称为 M 的极点. 若一条完备测地线自相交, 则它包含有测地回路. 设 $\gamma: [a,b] \to M$ 是测地回路, $D \subset M$ 是 $\gamma[a,b]$ 围成的圆盘区域, ω 是 D 在基点 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 处的内角. 则由 Gauss-Bonnet 定理得

$$c(D) = \pi + \omega,$$

因而

$$\int_M G_+ \,\mathrm{d}M > \pi.$$

因此 M 没有测地回路, 或等价地, M 中不存在具有自相交的完备测地线, 若

$$\int_M G_+ \,\mathrm{d}M \leqslant \pi.$$

注 2.3.1 若 $\int_M G_+ \, \mathrm{d}M > \pi$, M 中是否存在测地回路?

不存在这样的测地回路. 实际上, 可如下构造一个反例. 从平面中挖去一个圆盘, 并用 "小山" D 盖住挖掉的洞, 使得 $\int_D G_+ \, \mathrm{d}M = \alpha > 0$, 其中 α 为足够小的正数. 设 m 是这样的 "小山", 在平面 M 上不相交, 使得 $m\alpha > \pi$, 且任意两个之间的距离足够大. 则 M 上不存在测地回路. 在这种情况下全曲率为 0.

以下将给出本节证明中经常用到的技巧.

设 $A \subset M$ 是由测地多边形围成的闭圆盘. 对于点 $q \in M \setminus A$ 和 $p \in \partial A$, 令 pq 是不与 int A 相交的测地线段. 集合 $\widehat{A} := A \bigcup pq$ 具有良好边界 $pq \bigcup \partial A$. A 称作局部凹的, 当且仅当其内角不小于 π; 同样, $\widehat{A}$ 称为局部凹的, 当且仅当其良好边界的所有隅角的内角不小于 π (见图 2.3.1). 若 $\widehat{A}$ 是局部凹的, 则通过长度递减形变可得到它的良好边界. 然后我们可以得到在 p 处的测地回路, 使得在 $M \setminus \text{int}\, A$ 中所有以 p 为基点且自由同伦于 $\partial(\text{int}\, \widehat{A})$ 的闭曲线中, 它的长度最小. 若 A 局部凹, 则对每个 $p \notin A$, 可以找到在 p 点的测地回路, 使得在 $M \setminus \text{int}\, A$ 中所有以 p 为基点且自由同伦于 ∂A 的回路中, 它的长度最小.

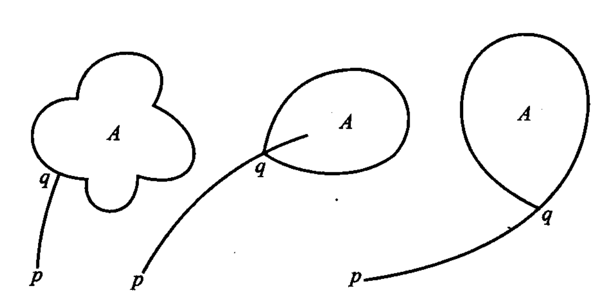


图 2.3.1 每一个有良好边界的紧致集是局部凹的

以下定理说明在全曲率大于 π 的黎曼平面上 $\mathcal{S}_0$ 是一个有界非空集合.

定理 2.3.1 (见[20] 中 Satz 6) 假设 M 的全曲率大于 π. 对于每个有界集 $A \subset M$, 存在包含 A 的有界集 $N \subset M$, 使得 $M \setminus N$ 中的所有点都是某个测地回路的基点, 且由这样的测地回路围成的圆盘区域内部包含 A.

以下命题有助于定理 2.3.1 的证明.

命题 2.3.1 设 $A \subset M$ 是黎曼平面 M 中的闭圆盘, 使得 ∂A 由测地多边形组成. 对每个 $p \in M \setminus \text{int}\, A$, 设 c_p 是以 p 为基点的闭曲线, 且在 $M \setminus \text{int}\, A$ 中所有以 p 为基点自由同伦于 ∂A 的闭曲线中, 它的长度最小, 则有以下结论:

(1) 函数 $p \to L(c_p)$ 为 Lipschitz 连续, Lipschitz 常数为 2.

(2) 设 $\sigma : [0, l] \to M \setminus \text{int}\, A$ 是从 A 到点 $q \in M \setminus A$ 的极小测地线, f_σ :

$[0,l] \to \mathbb{R}$ 定义为 $f_\sigma(t) := L(c_{\sigma(t)})$, 则 f 为 Lipschitz 连续, Lipschitz 常数为 2.

(3) 若 $\gamma : [0,\infty) \to M \setminus \mathrm{int}\, A$ 是从 A 出发的射线, 使得对所有充分大的 t, 有 $c_{\gamma(t)} \bigcap A \neq \varnothing$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在单调发散序列 $\{t_j\}$, 使得曲线 $c_{\gamma(t_j)}$ 在 $\gamma(t_j)$ 处的角小于 ε.

证明 若对于点 $p, q \in M$, pq 是 $M \setminus A$ 中由 p 到 q 的极小测地线段, 则 $pq \bigcup c_q \bigcup qp$ 在 $M \setminus A$ 中自由同伦于 c_q, 且 $L(c_p) \leqslant L(c_q) + 2d(p,q)$. 这就证明了 (1).

(2) 的证明可由 (1) 直接得到.

我们通过构造一个矛盾来证明 (3). 设 $\theta(t)$ 是圆盘区域 D_t 中 $\gamma(t)$ 处的角, 其中 D_t 由 $c_{\gamma(t)}$ 围成. 由 D_t 的构造知它包含 A. 假设 (3) 不成立, 则存在充分小的 $\varepsilon_0 > 0$ 和充分大的 t_0, 使得对所有 $t > t_0$, 有 $\theta(t) \geqslant \varepsilon_0$.

由三角不等式可知 f_γ 在无穷处的渐近性态. 即对所有的 $t > 0$,

$$| f_\gamma(t) - 2t | \leqslant L(\partial A).$$

显然 D_t 的内部包含 $\gamma[0,t)$. 因此角 $\theta(t)$ 由 $-\dot{\gamma}(t)$ 分为 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$. 若 f_γ 在 t 处可微, 则 $f'_\gamma(t) = \cos\alpha(t) + \cos\beta(t) \leqslant 2\cos(\theta(t)/2)$. 由 (2) 知对所有 $t_1 > t_0$,

$$f_\gamma(t_1) - f_\gamma(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t_1} 2\cos\frac{\theta(t)}{2}\mathrm{d}t \leqslant 2(t_1 - t_0)\cos\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这与 f_γ 的渐近性态矛盾. 证毕.

定理 2.3.1 的证明 假设存在单调发散点列 $\{p_j\}$, 使得在 $M \setminus \mathrm{int}\, A$ 中自由同伦于 ∂A 的测地回路都不以 p_j 为基点. 对每个 j, 设 $\gamma_j : [0, l_j] \to M \setminus \mathrm{int}\, A$ 是从 A 到 p_j 的极小测地线, 选取 $\{\gamma_j\}$ 的子列, 使它收敛于由 A 发出的射线 γ. 由于 $p_j = \gamma_j(l_j)$ 不是 $M \setminus \mathrm{int}\, A$ 中自由同伦于 ∂A 的测地回路的基点, 故 $c_{p_j} \bigcap A \neq \varnothing$. 显然 γ_j 上的每个点 x 具有与 p_j 相同的性质, 即 $c_x \bigcap A \neq \varnothing$. 由于 $\gamma(t)$ 是 $\{\gamma_j(t)\}$ 的极限, 可知 $c_\gamma(t) \bigcap A \neq \varnothing$.

记 $a := c(M) - \pi > 0$. 选取由测地多边形围成的充分大的圆盘区域 B, 使得 $B \supset A$,

$$c(B) > \pi + \frac{a}{2}, \quad \text{且} \int_{M\setminus B} | G | \,\mathrm{d}M < \frac{a}{4}.$$

由我们的假设可知存在充分大的 $t(B)$, 使得对每个 $j > t(B)$, p_j 不是 $M \setminus \mathrm{int}\, B$ 中任何自由同伦于 ∂B 的测地回路的基点. 因此命题 2.3.1 中的 (3) 可应用于从 B 出发的射线 $\tau : [0,\infty) \longrightarrow M \setminus \mathrm{int}\, B$. 对于我们选取的 B 和满足 $\theta(t) < a/4$ 的充分大的 t, 可以得到由 $c_{\tau(t)}$ 围成的凸圆盘区域 D_t. 由 D_t 的凸性得 $c(D_t) + (\pi - \theta(t)) \leqslant 2\pi$. 然而由 B 的选取以及 $D_t \supset B$ 知

$$c(D_t) = c(B) + c(D_t \setminus B) > c(B) - \int_{M\setminus B} | G | \,\mathrm{d}M > c(B) - \frac{a}{4}.$$

于是得到矛盾. 证毕.

例 2.3.1 考虑在例 2.1.3 中所定义的旋转抛物面. 若 $\gamma(s)=(r(s),\theta(s))$ 是单位速度测地线, 则

$$r''(s)+\frac{k^2r}{1+k^2r^2}(r'(s))^2-\frac{r}{1+k^2r^2}(\theta'(s))^2=0,$$
$$\theta''(s)+\frac{2}{r}\theta'(s)r'(s)=0.$$

对于任意给定的正数 r_0, γ 的初始条件为

$$\gamma(0)=(r_0,0),\quad \dot\gamma(0)=\frac{\partial}{\partial\theta}(r_0,0)/\sqrt{g_{22}(r_0,0)}.$$

由变形的 Clairaut 定理 (定理 1.3.2) 可知

$$\theta'(s)r^2(s)=r_0\cos\angle\left(\dot\gamma(0),\frac{\partial}{\partial\theta}(r_0,0)\right)=r_0.$$

因为 γ 以弧长为参数, 故

$$\|\dot\gamma(s)\|^2=(r')^2(1+k^2r^2)+(\theta')^2r^2=1,$$
$$\mathrm{d}\theta^2r^4=\mathrm{d}s^2r_0^2.$$

在以上关系式中消去 $\mathrm{d}s^2$, 可得对 $r>r_0$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right)^2=\frac{r_0^2(1+k^2r^2)}{r^2(r^2-r_0^2)}>0.$$

因此 $\theta(s)$ 和 $r(s)$ 当 $s>0$ 时严格递增. 于是沿 γ 有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}=\frac{r_0\sqrt{1+k^2r^2}}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}>0,\qquad s>0.$$

由不等式

$$k^2-\frac{1+k^2r^2}{r^2-r_0^2}<0,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}>k\frac{r_0}{r}.$$

积分得

$$\theta(r_1)-\theta(r_0)>\int_{r_0}^{r_1}k\frac{r_0}{r}\mathrm{d}r=k\log\frac{r_1}{r_0},$$

因而

$$\lim_{r_1\to\infty}\theta(r_1)=+\infty.$$

综合以上论证, 可知如下结论成立:

(1) γ 的像有无限多个自交点.

(2) 存在测地回路 $\gamma|_{[-t_0,t_0]}$ 的弧段, 使得弧 $\gamma|_{(t_0,\infty)}$ 和 $\gamma|_{(-\infty,t_0)}$ 没有自交, 也不与回路 $\gamma|_{[-t_0,t_0]}$ 相交.

进而, 由于当 $s>0$ 时 $\theta(s)$ 单调递增, 故存在唯一的 $R(r_0)>0$, 使得 $\theta(R(r_0))=\pi$, 或者等价地, $\gamma(R(r_0))=(R(r_0),\pi)$. 由 $\sqrt{1+k^2r^2}<1+kr$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}<\frac{r_0(1+kr)}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}=\frac{kr}{\sqrt{r^2-r_0^2}}+\frac{r_0}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}.$$

于是有

$$\pi=\theta(R(r_0))<kr_0\log\frac{2R(r_0)}{r_0}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{R(r_0)^2-r_0^2}}{r_0}.$$

因为 $R(r_0)$ 是以抛物面极点处的凸半径为下界, 故

$$\lim_{r_0\to0}\tan^{-1}\frac{\sqrt{R(r_0)^2-r_0^2}}{r_0}=\frac{\pi}{2}.$$

同样, 由

$$\liminf_{r_0\to0}(kr_0\log 2R(r_0))\geqslant\frac{\pi}{2},$$

可知 $\liminf\limits_{r_0\to0}R(r_0)=\infty$.

注意到在某个 $r_*>0$ 处取到 $\inf\limits_{r_0>0}R(r_0)$. 设 γ_* 是满足初始条件

$$\gamma_*(0)=(r_*,0),\quad \dot\gamma_*(0)=\frac{\partial}{\partial\theta}(r_*,0)/\sqrt{g_{22}(r_*,0)}$$

的测地线, 则点 $\gamma_*(-R(r_*))=\gamma_*(R(r_*))$ 沿 γ_* 自共轭 (见图 2.3.2). 再注意到 $\mathcal{S}_0=\{(r,\theta);r<R(r_*)\}$, 并且 $\mathcal{S}_1=\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的原点.

例 2.3.2 考虑例 2.1.4 中的双叶双曲面的一支. 设 $\gamma(s)=(r(s),\theta(s))$ 为单位速度测地线, 满足初始条件

$$\gamma(0)=(r_0,0),\quad \dot\gamma(0)=\frac{\partial}{\partial\theta}(r_0,0)/\sqrt{g_{22}(r_0,0)},$$

则有

$$r''(s)+\Gamma_{11}^1(r'(s))^2+\Gamma_{22}^1(\theta'(s))^2=0,$$
$$\theta''(s)+\frac{2}{r}r'(s)\theta'(s)=0.$$

利用与上例中相同的方法, 可知对 $r>r_0$ 有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}=\frac{r_0}{r}\sqrt{\frac{k^2r^2(1+k^2)+1}{(r^2-r_0^2)(1+k^2r^2)}}.$$

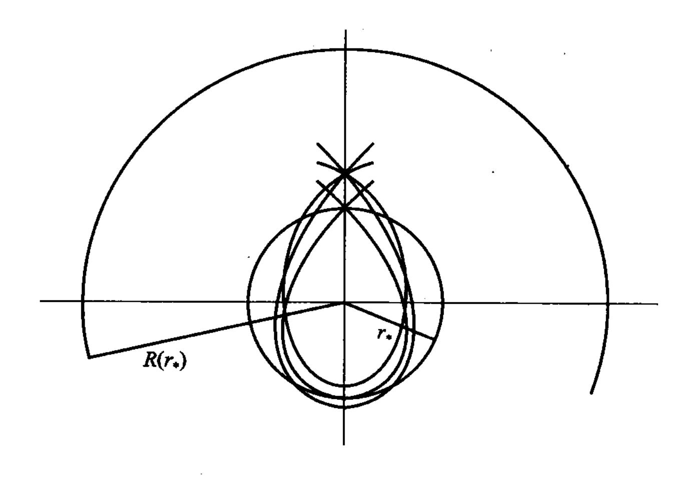


图 2.3.2

由不等式

$$k^2+1-\frac{k^2r^2(1+k^2)+1}{1+k^2r^2}>0,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}<\frac{r_0\sqrt{k^2+1}}{r\sqrt{r^2-r_0^2}},$$

因而有

$$\theta(r_1)-\theta(r_0)<\int_{r_0}^{r_1} r_0\sqrt{k^2+1}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}=\sqrt{k^2+1}\tan^{-1}\frac{\sqrt{r_1^2-r_0^2}}{r_0}.$$

因此

$$\lim_{r_1\to\infty}\theta(r_1)\leqslant\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}\pi.$$

由

$$\frac{k^2r^2(1+k^2)+1}{1+k^2r^2}\geqslant 1+k^2-\frac{k^2}{k^2r_0^2+1},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\geqslant\sqrt{1+k^2-\frac{k^2}{k^2r_0^2+1}}\frac{1}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}.$$

这说明

$$\theta(r_1)-\theta(r_0)\geqslant\sqrt{1+k^2-\frac{k^2}{k^2r_0^2+1}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{r_1^2-r_0^2}}{r_0},$$

并且由此可以得出

$$\lim_{r_1\to\infty}\theta(r_1)\geqslant\frac{\pi}{2}\sqrt{1+k^2-\frac{k^2}{k^2r_0^2+1}}.$$

将上述论证总结为如下结论:

(1) 若 $k \leqslant \sqrt{3}$ (或等价地 $c(M) \leqslant \pi$), 则对 $\lim\limits_{r_1 \to \infty} \theta(r_1) \leqslant \pi$, γ 没有自交点.

(2) 若 $k > \sqrt{3}$ (或等价地 $c(M) > \pi$), 则 γ 至多有有限多个自交点. 这里若 r 充分远离原点, 则 γ 的自交点的个数至多为 $(k^2+1)/2 = \pi/(2\pi - c(M))$.

(3) $\mathcal{S}_1$ 包含原点的一个邻域.

例 2.3.1 和 2.3.2 中的完备测地线对正曲率黎曼平面仍然成立. 这是最简单的情形. 黎曼平面上完备测地线更一般的性质将在第八章中讨论.

定理 2.3.2 (见 [20] 中 Sätze 7, 8) 假设 M 具有正 Gauss 曲率, 且$c(M) > \pi$. 若完备测地线 γ 有一个自交点, 则以下结论成立:

(1) $\gamma(\mathbb{R})$ 包含唯一的测地回路 $\gamma[a,b]$.

(2) γ 的每个子弧段 $\gamma|_{[b,\infty)}$ 和 $\gamma|_{(-\infty,a]}$ 为发散的, 没有自相交, 并且除了基点处之外不与回路 $\gamma[a,b]$ 相交.

进一步, 若 $\sigma : [0,\infty) \to M$ 有一个自交点, 则

(3) $\sigma[0,\infty)$ 包含唯一的测地回路 $\sigma[a,b]$, 使得 $\sigma[0,a) \bigcup \sigma(b,\infty)$ 不与回路 $\sigma[a,b]$ 相交, 并且$\sigma[b,\infty)$没有自相交.

(4) $\sigma(b,\infty)$ 为发散的.

(5) $\sigma(0,\infty)$ 有至多有限个自相交.

证明 选择 γ 的测地回路 $\gamma|_{[a,b]}$.

我们将证明 $\gamma|_{[b,\infty)}$ 没有自相交, 并且除 $\gamma(b)$ 点外不与测地回路相交. 假设 $\gamma|_{[b,\infty)}$ 有自相交, 则可以找到子弧段 $\gamma|_{[c,d]}$, $b \leqslant c < d < \infty$, 使得它也是测地回路. 设 D, D' 分别是 $\gamma[a,b]$ 和 $\gamma[c,d]$ 围成的圆盘区域, 则可能有三种情形.

首先, 若 $D \bigcap D' = \varnothing$, 则 $c(M) > c(D) + c(D') > 2\pi$, 矛盾.

若 $D \bigcap D' \neq \varnothing$, 则可找到参数 $b' \in [a,b], d' \in [c,d]$, 使得 $\gamma(b') = \gamma(d') \in \partial D \bigcap \partial D'$. 因而测地回路 $\gamma|_{[b',d']}$ 在其基点处的内角大于 π, 矛盾.

最后假设一个圆盘完全包含于另一个之中. 设 $D \subset D'$, 则 D' 在 $\gamma(c) = \gamma(d)$ 处的角大于 π, 因而 $c(D') > 2\pi$, 矛盾. 这样便得到了 $\gamma[0,\infty)$ 中测地回路的唯一性, 这也证明了 $\gamma|_{[b,\infty)}$ 和 $\sigma|_{[b,\infty)}$ 的单射性.

对定理 2.3.2 余下的部分, 我们需要证明每条测地线 $\gamma : [0,\infty) \to M$ 为发散的. 假设 γ 不是发散的, 则可以找到单调发散序列 $\{t_j\}$, 使得 $\{\dot\gamma(t_j)\}$ 收敛于单位向量 $u \in T_pM$, 其中 $p \in M$. 取由 γ 的子弧段和长度很小且与这个子弧段几乎正交的测地线围成的圆盘区域 (见图 2.3.3). 取定点 $q \notin D$ 和邻域 $U_q \subset M \setminus D$, 可以选取围成 D 的小测地线段, 使得 $c(D) > 2\pi - \varepsilon/2$, 其中 $\varepsilon := c(U_q) > 0$. 这与 Cohn-Vosson 定理 2.2.1 相矛盾. 证毕.

注 2.3.2 测地线的发散性质也可以通过具有正截曲率的 n 维完备非紧黎

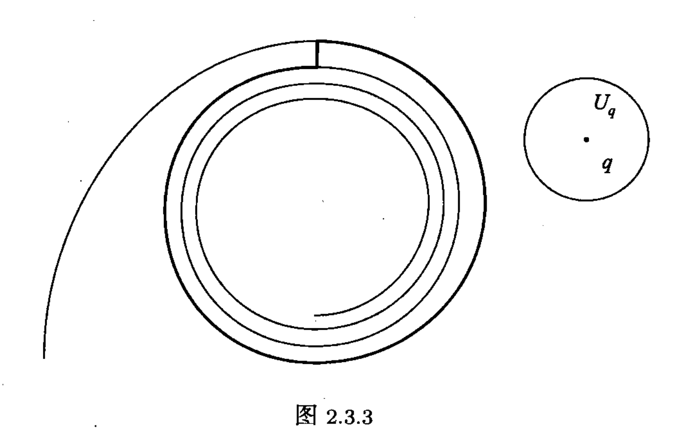


图 2.3.3

曼流形上 Busemann 函数的凸性来证明. 这一性质说明 M 上每一点处的指数映射是恰当的 (见 [30]).

推论 2.3.1 设 M 具有正 Gauss 曲率并且 M 的全曲率大于 π, 则 M 的每个没有自相交的完备测地线是一个半平面的边界.

证明 设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的北极点, $H: M \to \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathcal{N}\}$ 是同胚. 由定理 2.3.2(2), 完备测地线 $\gamma: \mathbb{R} \to M$ 的两点紧致化在 H 下的像是通过 $\mathcal{N}$ 的简单闭曲线, 因此它将 $\mathbb{S}^2$ 分割为两个圆盘区域. 证毕.

定理 2.3.3 (见 [20] 中 Satz 10) 设 M 具有正 Gauss 曲率. 如果 γ_1, γ_2 是 M 上的完备测地线, 则它们至少有一个交点.

证明 分三种情形来讨论.

首先假设每个 γ_i 都自相交. 则由定理 2.3.2(1), 对 $i=1,2$, γ_i 中包含唯一的测地回路, 它围成圆盘 D_i. 显然 $c(D_i) > \pi$, 且 $c(M) \leqslant 2\pi$, 因此有 $D_1 \bigcap D_2 \neq \varnothing$.

其次假设 γ_1 有自相交而 γ_2 没有, 则由推论 2.3.1 得 $\gamma_1(\mathbb{R})$ 是 M 中一个半平面的边界. 设 $H_1 \bigcup H_2 = M \setminus \gamma_1(\mathbb{R})$ 是以 $\gamma_1(\mathbb{R})$ 为边界的半平面, 则 $\lambda(\partial H_i) = 0$, $i = 1,2$. 假设 $\gamma_1(\mathbb{R}) \bigcap \gamma_2(\mathbb{R}) = \phi$, 则 $\gamma_2(\mathbb{R})$ 上的测地回路完全包含于一个半平面中. 若 H_1 包含有测地回路, 则 $c(H_1) > \pi$, 这与推论 2.2.1 矛盾.

最后假设 γ_1 和 γ_2 都没有自相交; 进一步, 假设它们互不相交, 则 $\gamma_i(\mathbb{R})$ 围成 M 中的半平面 H_i, 使得交集 $H := H_1 \bigcap H_2$ 构成一个同胚于 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1\}$ 的开的带形区域. 将定理 2.2.1 中的 (2.2.1) 式应用于 H 得 $c(H) \leqslant 0$, 矛盾. 证毕.

定理 2.3.4 (见 [20] 中 Satz 11) 假设 M 具有正 Gauss 曲率, 则通过 M 中的每个点, 存在没有自相交的完备测地线.

注意到若 M 具有正 Gauss 曲率并且 $c(M) \leqslant \pi$, 则 M 上没有自相交的完备

测地线. 因此可以只考虑 $c(M) > \pi$ 的情形. 由 2.3.1 定理知 M 具有测地回路. 若完备测地线 γ 没有自相交, 则由定理 2.3.2 和 2.3.3 证明过程中的方法知 $\gamma(\mathbb{R})$ 穿过每个固定测地回路上的一点. 因此可知每条没有自交的完备测地线可通过由测地回路围成的圆盘区域中的一点. 从例 2.3.1 和 2.3.2 中容易看出这一现象.

定理 2.3.4 的证明 只讨论 $c(M) > \pi$ 的情形. 任意给定点 $p \in M$, 选取完备测地线 $\gamma_0 : \mathbb{R} \to M$ 满足 $\gamma_0(0) = p$. 假设 γ_0 自相交, 设 $\mathcal{F}_0 := \gamma_0[a, b]$ 是 $\gamma_0(\mathbb{R})$ 中唯一的测地回路, D_0 是由 $\mathcal{F}_0$ 围成的圆盘区域. 选取 $\mathcal{F}_0$ 的正交标架场 $\{e_1, e_2\}$, 使得 $e_1(\gamma_0(t)) = \dot{\gamma}_0(t)$, 并且对 $t \in [a, b]$, $e_2(\gamma_0(t))$ 指向 D_0 的内部. (e_1, e_2) 的定向与 M 一致. 单位圆 $\mathbb{S}_p(1) \subset T_pM$ 具有弧长参数表示 $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}_p(1)$, 使得 $\theta(0) := \dot{\gamma}_0(0)$, 则 p 处的单位向量与 $[0, 2\pi)$ 中的值相对应. 设 $\gamma_u : \mathbb{R} \to M$ 是完备测地线, $\gamma_u(0) = p$, $\dot{\gamma}_u(0) = u$, 其中 $u \in [0, 2\pi)$.

假设不存在没有穿过 p 自相交的完备测地线. 则对每个 $u \in [0, 2\pi)$, $\gamma_u : \mathbb{R} \to M$ 包含唯一一个测地回路 $\mathcal{F}_u$, 它围成圆盘区域 D_u. 由测地线初始条件中的连续性, 存在充分小的正数 h, 使得对所有 $u \in [0, h)$, 可以连续地沿 $\mathcal{F}_u$ 选取 $\{e_1, e_2\}$, 满足 $e_1(\gamma_u(t)) = \dot{\gamma}_u(t)$, 且 $e_2(\gamma_u(t))$ 指向 D_u 内部, (e_1, e_2) 的定向与 M 一致. 然而, 无法连续地沿 γ_π 选取正交标架场! 设 $\mathbb{A}$ 是所有参数 $\{u \in [0, \pi)\}$ 中满足下列条件的集合: 存在 $\mathcal{F}_u$ 的正交标架, 使得 $e_1 = \dot{\gamma}_u$, e_2 指向 D_u 内部, 且 (e_1, e_2) 的定向与 M 一致. 显然 $0 \in \mathbb{A}$, 因此 $\mathbb{A} \neq \varnothing$. 更进一步, $\mathbb{A}$ 包含区间 $I = [0, \boldsymbol{a})$. 由我们的假设知 $\gamma_{\boldsymbol{a}}$ 自相交, 由连续性的讨论知

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}} = \lim_{u \to \boldsymbol{a}} \mathcal{F}_u, \qquad D_{\boldsymbol{a}} = \lim_{u \to \boldsymbol{a}} D_u.$$

因此 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{A}$, 特别地, I 为开的. 因此 $\pi \in \mathbb{A}$, 矛盾. 证毕.

下面的定理 2.3.5 证明了 M 上一点处最大测地回路的存在性.

定理 2.3.5 (见 [20] 中 Satz 12) 假设 M 具有正 Gauss 曲率, $c(M) > \pi$. 设 $p \in M$ 是一个测地回路的基点, 则存在以 p 为基点的测地回路 $\mathcal{F}_p$ 满足如下性质: 若 D_p 是由 $\mathcal{F}_p$ 围成的圆盘区域, 则 D_p 的闭包 $\overline{D}_p$ 是全凸的, 即每条连接 $\overline{D}_p$ 上的点的测地线段完全包含于 $\overline{D}_p$ 中.

注 2.3.3 集合 A 称为全凸的, 当且仅当每条连接 A 中两点的测地线段完全包含于 A 中. 测地回路 $\mathcal{F}_p$ 在以下意义下称为极大的: 若 $\mathcal{F}'$ 是以 p 为基点的测地回路且 D' 是由 $\mathcal{F}'$ 围成的圆盘区域, 则 $D' \subset D_p$.

证明 设 $\mathcal{F}$ 是以 p 为基点的测地回路, D 是由 $\mathcal{F}$ 围成的圆盘区域. 若 α 是 D 在 p 处的内角, 则有 $\alpha < \pi$. 在 $\mathbb{S}_p(1)$ 上选取逆时针定向, 令 $[a, b] := \mathbb{S}_p(D)$ 是 p 在 D 处的单位切向量. 则

$$\alpha = b - a, \; a < b < a + \pi.$$

设 $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 p 点测地回路的集合, 其中 Λ 为指标集. 对每个 $\lambda\in\Lambda$, 设 D_λ 和 α_λ 分别为圆盘区域和它在 p 点的内角. 记

$$[a_\lambda, b_\lambda] := \mathbb{S}_p(D_\lambda), \qquad \lambda\in\Lambda,$$

则

$$\alpha_\lambda = b_\lambda - a_\lambda, \qquad a_\lambda < b_\lambda < a_\lambda + \pi,$$

并且 (见图 2.3.4)

$$b-\pi < a_\lambda < b < a+\pi, \qquad b-\pi < a < b_\lambda < a+\pi.$$

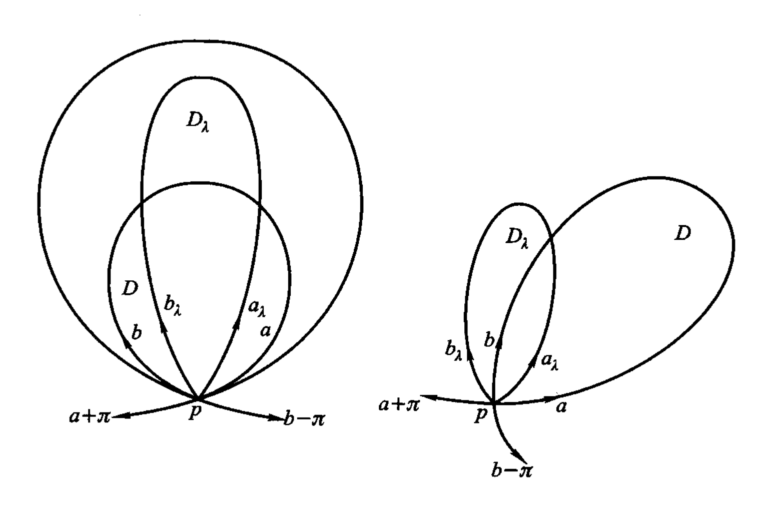


图 2.3.4

注意到对所有 $\lambda,\mu\in\Lambda$,

$$D_\lambda\bigcap D_\mu \neq \varnothing, \qquad D_\lambda\bigcap D \neq \varnothing.$$

对于 $a_\lambda < b$ 和 $a < b_\lambda$ 的证明可通过反证法, 则 $D\bigcap D_\lambda = \varnothing$ (见图 2.3.5).

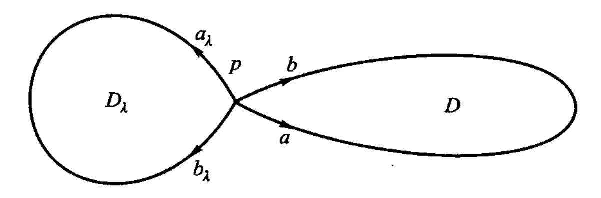


图 2.3.5

为找到 p 点的最大测地回路, 记

$$a_0 := \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, \qquad b_0 := \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda.$$

若 a_0 在某个 a_λ 处得到, 则 $\mathcal{F}_\lambda$ 是 p 处的最大测地回路. 实际上, 若对某个 $\mu \in \Lambda$, $b_\lambda < b_\mu$, 则由最短路径原理, 可以找到 p 点的测地回路 $\mathcal{F}'$, 它的圆盘区域包含 $D_\lambda \bigcup D_\mu$ (见图 2.3.4). 因此假设

$$a_0 = \liminf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda.$$

我们得到以下的断言:

断言 2.3.1 若 $a_0 = \liminf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$, 则存在 p 点处与 a_0 相切的测地回路 $\mathcal{F}_p$. 进而, 若 b_0 是 $\mathcal{F}_p$ 在 p 点的另一个切向量, 则

$$b_0 = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \limsup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda.$$

证明 设 $\gamma_0(t) := \exp_p ta_0$ 是完备测地线. 假设 γ_0 没有自相交. 则由推论 2.3.1 知, 它将 M 划分为半平面. 由 $b_\lambda < a_0 + \pi, \lambda \in \Lambda$, 存在包含 D_λ 的半平面 H, 使得 $\partial H = \gamma_0(\mathbb{R})$, 则由引理 2.2.2 可得矛盾.

因此 γ_0 自相交. 由定理 2.3.2 中 (1) 可得, $\gamma_0(\mathbb{R})$ 包含唯一一个测地回路, 记为 $\mathcal{F}_0$. 设 D_0 是由 $\mathcal{F}_0$ 围成的圆盘区域, s 是基点, 则 $\mathcal{F}_0 \bigcap \mathcal{F}_\lambda \neq \varnothing, \lambda \in \Lambda$. 实际上, 若做相反的假设, 则由 $2\pi < c(D_0) + c(D_\lambda) < c(M)$ 可得矛盾.

接下来断定 $p \in \mathcal{F}_0$. 假设 $p \notin \mathcal{F}_0$. 显然对所有的 $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{F}_0 \bigcap \mathcal{F}_\lambda \neq \varnothing$. 设 $l > 0$, 且对某个 $\lambda \in \Lambda$, $\gamma_0[0, l) \bigcap D_\lambda = \varnothing$, $\gamma_0(l) \in \mathcal{F}_\lambda$ (见图 2.3.6), 则可以找到由 $\gamma_0[0, l]$ 和 $\mathcal{F}_\lambda$ 在 p 和 $\gamma_0(l)$ 之间的子弧段组成的测地双角. 由于这一双角在 $\gamma_0(l)$ 处的内角大于 π, 通过基点为 p 的双角的一个长度递减形变可得到基点为 p 的测地回路 $\mathcal{F}_*$, 它围成的圆盘区域 D_* 的内部包含 $D_\lambda \bigcup D_0$. 设 $[a_*, b_*] := \mathbb{S}_p(D_*)$. 则 $a_* < a_0$, 这与 $a_0 = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ 矛盾. 若 $l < 0$, 则由 $\mathcal{F}_*$ 围成的圆盘区域 D_* 可由相同方法得到. 则 $b_* > a_0 + \pi$. 这与对任意的 $\lambda \in \Lambda$, $b_\lambda \leqslant a_0 + \pi$ 矛盾. 于是证明了 $p \in \mathcal{F}_0$. 证毕.

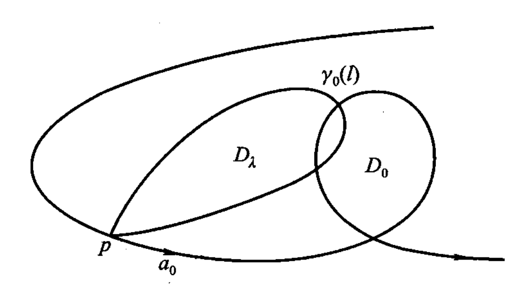


图 2.3.6

我们将证明对任意的 $\lambda \in \Lambda$, $D_\lambda \bigcap D_0 \neq \varnothing$. 之前已有

$$a_0 \leqslant a_\lambda,\ b_\lambda - \pi < a_0 \leqslant a_\lambda + \pi,\ \forall \lambda \in \Lambda.$$

则可知不会出现如图 2.3.7 所示的两个测地回路的位置, 它们与 $\mathcal{F}_0$ 有两个交点. 同样, 不存在与 $\mathcal{F}_0$ 有三个交点的测地回路 $\mathcal{F}_\lambda$. 在这一情形中由 $a_\lambda+\pi<a_0$ 或 $a_0<b_\lambda-\pi$ 得矛盾.

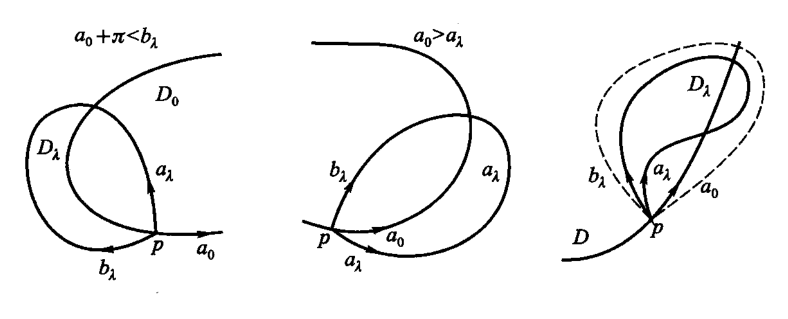


图 2.3.7

现在假设对某个 $\lambda\in\Lambda$, D_λ 没有完全包含于 D_0 之中. 选取点 $q\in\mathcal{F}_0\bigcap\mathcal{F}_\lambda$ 和 $\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_\lambda$ 在 p,q 之间的子弧段, 它们构成了一个测地双角, 它在 q 点的角度大于 π. 因此这个以 p 为基点的测地双角的长度递减形变给出了 p 处的测地回路 $\mathcal{F}_*$, 使得由 $\mathcal{F}_*$ 围成的圆盘区域 D_* 具有如下性质: 若记 $[a_*,b_*]:=\mathbb{S}_p(D_*)$, 则 $a_*<a_0$; 这是一个矛盾. 因此证明了 p 处所有测地回路完全包含于 D_0 之中, 且对所有的 $\lambda\in\Lambda$,

$$D_\lambda\subset D_0.$$

最后, 设 l_λ 为 $\mathcal{F}_\lambda$ 的长度. 假设存在子序列 $\{l_i\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}l_i=\infty$. 选取参数 t_0, 使得 $p=\gamma_0(t_0)$. 定理 2.3.2 中 (2) 指出 $\gamma_0(t_0)\in M\setminus D_0$, 特别地 $\gamma_0(t_0+1)\in M\setminus D_0$. 由于 $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=a_0$, 我们有对任意满足 $l_i>t_0+1$ 的 i, $\exp_p(t_0+1)a_i\in D_0$. 这与 $\gamma_0(t_0+1)=\lim\limits_{i\to\infty}\exp_p(t_0+1)a_i$ 矛盾.

以上讨论说明 $\{l_i\}$ 有上界. 因此可以选取收敛子序列 $\{l_k\}$. 记 $l:=\lim\limits_{k\to\infty}l_k$, 可知

$$p=\lim_{k\to\infty}\exp_p l_k a_k=\gamma_0(t_0).$$

断言 2.3.1 的第二部分由 $\mathcal{F}_0$ 围成的圆盘区域 D_0 的极大性得到. 假设在 D_0 之外存在连接两点 $x,y\in\mathcal{F}_0$ 的测地线段 β. 进一步假设由 β 和 $\mathcal{F}_0$ 的子弧段组成的测地双角围成的圆盘区域 E 包含点 p, 则由 Gauss-Bonnet 定理得 $c(E)>2\pi$, 矛盾. 因此 E 不包含点 p. 由长度递减形变可得到以 px,py,β 为边的测地三角形, 最终可得到 p 处的测地回路, 它包含了极大圆盘区域 D_0, 这与 a_0 的选取矛盾. 记 $\mathcal{F}_p:=\mathcal{F}_0, D_p:=D_0$, 可得结论.

这同时也证明了 $\overline{D}_p$ 的完全凸性.

下面的定理 2.3.6 保证 $\mathcal{S}_1$ 非空.

定理 2.3.6 设 M 具有正 Gauss 曲率, $c(M) > \pi$. 若 $\sigma : \mathbb{R} \to M$ 是不自交的完备测地线, 则存在点 $q \in \sigma(\mathbb{R})$, 它不是任何测地回路的基点.

证明 假设 $\sigma(\mathbb{R})$ 上的每个点都是某个测地回路的基点. 设对每个 $x \in \sigma(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_x$ 是基点为 x 的极大测地回路, 如定理 2.3.5.

首先断定 $\mathcal{F}_x \bigcap \sigma(\mathbb{R})$ 只有单独一点 $\{x\}$. 否则存在 x 处的测度回路, 它的圆盘区域中包含 $\mathcal{F}_x$, 矛盾 (见图 2.3.7).

设 $x_1 := \mathcal{F}_x \bigcap (\sigma(\mathbb{R}) \setminus \{x\})$, 当 $i \geqslant 1$ 时, 对 x_i 处的极大测地回路 $\mathcal{F}_i$ 使用归纳法, 其中 x_i 是 $\mathcal{F}_{i-1}$ 与 $\sigma(\mathbb{R}) \setminus \{x_{i-1}\}$ 的唯一交点, 则 $\mathcal{F}_i$ 围成的圆盘区域 D_i 完全包含在 D_{i-1} 当中, 并且 x_i 落在 $\sigma(\mathbb{R})$ 在 x_{i-1} 和 x_{i-2} 之间的子弧段的内部. 若 α_i 是 D_i 在 x_i 处的内角, 则由 $c(D_i) = \pi + \alpha_i$ 可知 $\{\alpha_i\}$ 严格递减, 由 $\mathcal{F}_x$ 所围紧致集上凸半径的正性可得矛盾. 实际上, 对任意较小的正数 η, 存在充分大的 $i > j$, 使得 $d(x_i, x_j) < \eta$. 显然 x_i 是 $\mathcal{F}_{i-1}$ 的内点, 且 $\mathcal{F}_j$ 在 x_j 是一个小于 α_1 的锐角. 因此 $\mathcal{F}_j$ 在 x_i 附近与 $\mathcal{F}_{i-1}$ 相交. 这证明了定理 2.3.6. 证毕.

现在讨论 M 上完备测地线的整体性态, 其中 M 具有正曲率, 且 $c(M) > \pi$. 正如例 2.3.1 中对抛物面的讨论, 存在具有相同基点的两个不同测地回路. 这可以由 $\liminf\limits_{r_0 \to 0} R(r_0) = \infty$ 得出. 实际上这个关系式说明, 若抛物面上的点 p (如例 2.3.1) 充分远离原点, 则存在两个以 p 为基点的测地回路, 其中一条穿过原点附近的点.

由定理 2.3.5 可知, 若 $p \in M$ 是某个测地回路的基点, 则存在 p 点的极大测地回路 $\mathcal{F}_p$. 设 D_p 是 $\mathcal{F}_p$ 围成的开圆盘区域, D_p 在 p 处的内角小于 π. 因此在点 p 所有与 D_p 相切的单位向量组成单位圆 $\mathbb{S}_p(1) \subset T_pM$ 上的一个开区间 $\mathbb{S}_p(D_p)$. 记

$$\mathcal{J}_p := \{\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M; \gamma(0) = p, \pm\dot{\gamma}(0) \notin \mathbb{S}_p(D_p)\}.$$

由引理 2.2.1 (也可见定理 2.3.5 的证明) 可知任何 $\gamma \in \mathcal{J}_p$ 都不可能是半平面的边界, 因此包含至少一个自交点. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\gamma(\mathbb{R})$ 中唯一的测地回路, D 是相应圆盘区域, $s \in \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的基点. 由 $\overline{D}_p$ 的全凸性知 $D_p \subset D$. 因此每条测地线 $\gamma \in \mathcal{J}_p$ 具有唯一的测地回路将 D_p 包含在它的圆盘区域中 (见图 2.3.8).

接下来讨论从 p 出发并且经过 D_p 中的点的完备测地线. 记

$$\mathcal{J}_p := \{\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M; \dot{\gamma}(0) \in \mathbb{S}_p(D_p)\}.$$

可以得到以下可能发生的情形.

第一种情况, 存在没有自相交的完备测地线 $\gamma \in \mathcal{J}_p$. 这将在 $\mathcal{P} \neq \varnothing$ 且 γ 穿过 $\mathcal{P}$ 上一点的条件下发生 (定义 2.3.1).

第二种情况, $\gamma \in \mathcal{J}_p$ 自交. 设 $\mathcal{F} \in \gamma$ 是唯一的以 s 为基点的测地回路, 且 D 是 $\mathcal{F}$ 围成的圆盘区域 (见图 2.3.9). 对于点 s 有三种可能:

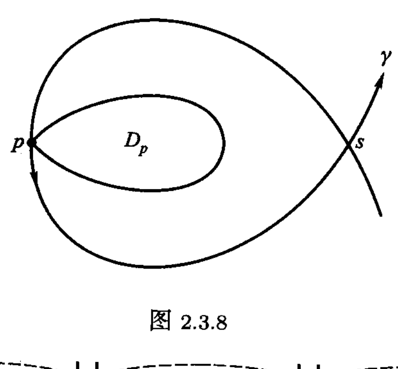


图 2.3.8

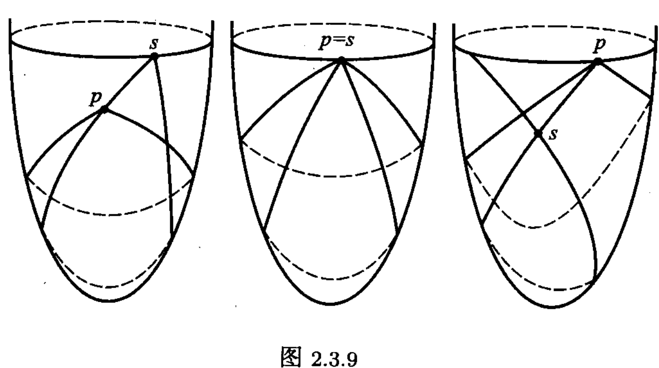


图 2.3.9

(1) $s \notin D_p$.

(2) $s = p$ 且 $D \subset D_p$.

(3) $s \in D_p$ 且 $D \subset D_p$.

现在来讨论集合 $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{P}$ 的性质.

定理 2.3.7 (见 [20] 中 Sätze 14, 15 和 16) 假设 M 具有正 Gauss 曲率, 则以下结论成立:

(1) 对每个 $p \in \mathcal{P}$, 指数映射 $\exp_p : T_pM \to M$ 是微分同胚.

(2) 从 $\mathcal{S}_1$ 上一点出发的完备测地线都没有自交点.

(3) 每条连接 $\mathcal{S}_1$ 上两点的测地线都在 $\mathcal{S}_0$ 中.

(4) 若 $c(M) > \pi$, 则每条连接 $\mathcal{P}$ 上两点的测地线都落在 $\mathcal{S}_1$ 中.

证明 显然满足 $\gamma(0) = p \in \mathcal{P}$ 的测地线 $\gamma : [0, \infty) \to M$ 都没有自交点, 则 γ 上没有共轭对. 实际上若否则, 对充分大的 $t > 0$ 子弧段 $\gamma\mid_{[0,t]}$ 不是极小的, 因而 $\gamma(t)$ 由极小测地线与 p 相连接. 因此 p 是测地双角的隅角, 这与 p 的选取矛盾. 这证明了 (1).

对于 (2), 假设完备测地线 γ 满足 $\gamma(0) = p \in \mathcal{S}_1$, 且有自相交. 设 $\gamma[a, b]$ 是 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 处的唯一测地回路, 且 $D_{\gamma(a)}$ 是相应的圆盘区域. 由于 $p \in \mathcal{S}_1$, 我们考虑 $a > 0$. 显然 $\gamma[0, b]$ 是紧致集 $\gamma[0, a] \bigcup \overline{D}_{\gamma(a)}$ 的良好边界, 将长度递减形变应

用于这个基点为 p 的良好边界可得到 p 处的测地回路, 这与 $p \in \mathcal{S}_1$ 的选取矛盾. 证得 (2).

对于 (3), 假设存在连接 $q_1, q_2 \in \mathcal{S}_1$ 的测地线段q_1q_2, 使得点 $r \in q_1q_2$ 为某个测地回路的基点. 由定理 2.3.5 知, 存在 r 处的极大测地回路 $\mathcal{F}_r$. 如 (2) 中的证明, q_1q_2 的完备延拓 σ 没有自相交. 则可知 $\mathcal{F}_r \bigcap (\sigma(\mathbb{R}) \setminus \{r\})$ 是单独一个点, 记为 r_1. 可以考虑点的顺序为 q_1, r, r_1, q_2 或者 q_1, r, q_2, r_1. 这两种情形均可得到 $q_1r \bigcup \mathcal{F}_r$ 构成一个紧致集的良好边界, 于是得到 q_1 处的测地回路. 这与 $q_1 \in \mathcal{S}_1$ 的选择相矛盾.

对于 (4), 假设存在测地线段 $p_1p_2, p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, 使得点 $q \in p_1p_2$ 落在一个围成圆盘区域 D 的测地回路上. 设 γ 是 p_1p_2 的完备延拓, s 是测地回路的基点. 则 γ 将 M 分为两个半平面, 记为 H_1 和 H_2. 我们可以假设 $s \in H_2$, 因而 $H_1 \setminus D$ 的所有隅角在 $\gamma(\mathbb{R})$ 上, 并且所有的内角小于 π. 由 $q \in p_1p_2$ 可得 p_1, p_2 中至少一个点不在 D 之中. 实际上, 假设 $p_1, p_2 \in D$, 则 $H_1 \bigcap D$ 具有至少两个分支 D_1, D_2, 使得 $p_i \in \overline{D_i}$, $p_1 \notin \overline{D_2}$. 由长度递减形变过程, 可以找到一条测地线将 p_1 连接到 γ 上的一个点, 这个点落在 $H_1 \setminus D_2$ 之中而在 D 之外. 这与 p_1 的选取矛盾. 若 $p_1 \notin D$, 我们可以用相同的方法找到一条测地线, 将 p_1 连接到 γ 上一点, 从而得到矛盾. 证毕.

注 2.3.4　在 (1) 的证明中, 我们只用到了长度递减形变的方法, 因而 (1) 对所有的黎曼平面都成立.

在本节的最后我们介绍 Bangert 的一个结果 (见 [10]), 它推广了定理 2.3.4. 证明用到了 Lusternik-Schnirelmann 关于同伦曲线的长度递减形变的方法.

定理 2.3.8 (见 [10])　每个完备黎曼平面都有至少一条不自交的完备发散测地线.

第三章　理想边界

几何理想边界的概念源于 Gromov, 见 [7]. 他定义了 Hadamard 流形和曲率非负的完备非紧 2 维流形. 本章中我们将给出在无穷远处容许曲率 $\lambda_\infty(M)$ 的非紧 2 维流形 M 的理想边界 $M(\infty)$. 这一定义首先在 [91] 中给出, 它是研究这样的 M 的整体几何性质的一个有力工具. 本章还将给出一些新的方向和定理, 特别是对理想边界 $M(\infty)$ 和紧致化 $\overline{M}^\infty = M\bigcup M(\infty)$ 拓扑性质的详细研究. 我们将给出具有较小全绝对曲率的三角区域的三角比较定理. 这将被用来证明, 若 M 在无穷处的曲率是有限的, 则 M 的数乘极限等距于具有 Tits 度量的理想边界 $M(\infty)$ 上的欧氏锥. 为了研究 L^p, $p \geqslant 1$ 在曲率边界下 2 维流形的极限, [98] 中给出了三角比较定理的一个变形. 在最后一节中, 我们将研究 Busemann 函数的渐近性态和穷竭性质, 这在 [78, 79, 91] 中进行了介绍.

§1　无穷远处的曲率

设 $c: I \longrightarrow M$ 是 2 维黎曼流形 M 中的分段光滑曲线, 其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间. 固定 c 的一侧来确定法向量场 $\boldsymbol{e}$ 和 c 在顶点 x_i 处的内角 ω_i. 关于法向量场 $\boldsymbol{e}$, 设 $\kappa(s)$ 是 c 在 $c(s)$ 处的测地曲率, $s \in I$, 且对于 I 的任意 Borel 子集 A, 定义

$$\lambda_+(c(A)) := \int_A (\kappa(s))_+ \mathrm{d}s + \sum_{x_i \in c(A)} (\pi - \omega_i)_+,$$

$$\lambda_-(c(A)) := \int_A (\kappa(s))_- \mathrm{d}s + \sum_{x_i \in c(A)} (\pi - \omega_i)_-,$$

其中 $(x)_+ := \max\{x, 0\}$, $(x)_- := -\min\{x, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$. 容易证明 $\lambda_\pm$ 是 $c(I)$ 上正的 Radon 测度. 因此 $\lambda := \lambda_+ - \lambda_-$ 是 $c(I)$ 上的带号 Radon 测度. 若 $c \subset \partial M$, 则 $\lambda(c) := \lambda(c(I))$ 与在 §1.9 和在 (2.1.7) 中所定义的全测地曲率是相容的. 记 $\lambda_{\text{abs}} := \lambda_+ + \lambda_-$.

定义 3.1.1 (无穷处的曲率) 设 M 是有限连通的紧致 2 维黎曼流形, 可以具有逐段光滑边界. M 在无穷处的曲率定义为

$$\lambda_\infty(M) := 2\pi\chi(M) - \pi\chi(\partial M) - c(M) - \lambda(\partial M),$$

它只有在以下二者中至少一个是有限的条件下有定义:

$$\int_M G_+ \mathrm{d}M + \lambda_+(\partial M), \quad \int_M G_- \mathrm{d}M + \lambda_-(\partial M).$$

Cohn-Vossen 定理论述了若 $\lambda_\infty(M)$ 存在, 则 $\lambda_\infty(M) \geqslant 0$. Gauss-Bonnet 定理说明若 M 紧致, 则 $\lambda_\infty(M) = 0$. 当 $\lambda_\infty(M)$ 存在时, 由于 $\lambda_\infty(M) \geqslant 0$, 故 $\int_M G_+ \mathrm{d}M$ 和 $\lambda_+(\partial M)$ 都是有限的.

例 3.1.1 (1) 对欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 有

$$\lambda_\infty(\mathbb{R}^2) = 2\pi.$$

(2) 若 M 为抛物面, 则 $\lambda_\infty(M) = 0$.

(3) 对双曲平面 $H^2(-1)$, 有 $\lambda_\infty(H^2(-1)) = +\infty$.

(4) 若 M 是 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geqslant 1\}$ 的万有覆盖空间, 则 $\lambda_\infty(M) = +\infty$.

引理 3.1.1 (1) 若 M 非紧, C 是 M 的柱心, 且 $\lambda_\infty(M)$ 存在, 则

$$\lambda_\infty(M) = \sum_V \lambda_\infty(V),$$

其中 V 取遍 $\overline{M \setminus C}$ 的所有连通分支.

(2) 若黎曼半平面 V 由不相交的恰当曲线 $\alpha_i : [0, +\infty) \longrightarrow V$, $i = 1, \cdots, k-1$ 分割为黎曼半平面 V_i, $i = 1, \cdots, k$ (见图 3.1.1), 并且 $\lambda_\infty(V)$ 和 $\lambda_\infty(V_i)$ 都存在, 则

$$\lambda_\infty(V) = \lambda_\infty(V_1) + \cdots + \lambda_\infty(V_k).$$

(3) 若黎曼半柱面 V 被不相交的恰当曲线 $\alpha_i : [0, +\infty) \longrightarrow V$, $i = 1, \cdots, k$ 分割为黎曼半平面 V_i, $i = 1, \cdots, k$ (见图 3.1.2), 并且 $\lambda_\infty(V)$ 和 $\lambda_\infty(V_i)$ 都存在, 则

$$\lambda_\infty(V) = \lambda_\infty(V_1) + \cdots + \lambda_\infty(V_k).$$

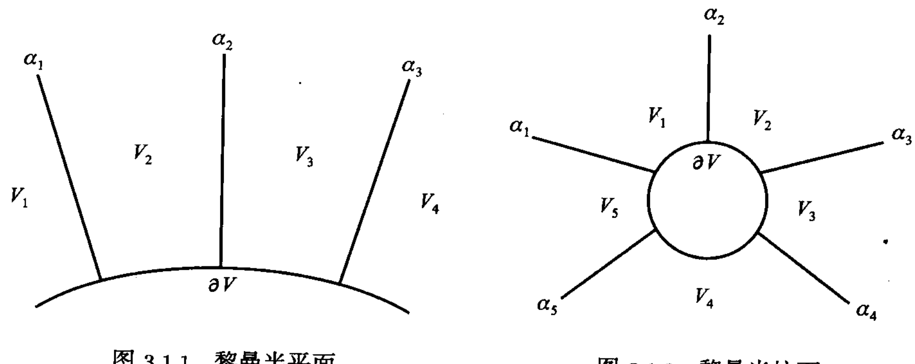


图 3.1.1 黎曼半平面　　图 3.1.2 黎曼半柱面

证明 证明是直接的 (参见定理 2.2.1 的证明). 证毕.

命题 3.1.1 若 M, M' 和 M'' 在无穷处的曲率都存在, 且 $M = M' \bigcup M''$, $M' \bigcap M'' \subset \partial M' \bigcap \partial M''$, 则

$$\lambda_\infty(M) = \lambda_\infty(M') + \lambda_\infty(M'').$$

证明 存在 M 的柱心 C, 使得 $C' := C \bigcap M'$ 和 $C'' := C \bigcap M''$ 分别为 M' 和 M'' 的柱心. 对于 $\overline{M \setminus C}$ 的任意连通分支 V, 可以找到 $\overline{M' \setminus C'}$ 和 $\overline{M'' \setminus C''}$ 的包含在 V 中的所有连通分支 V_i, $i = 1, 2, \cdots$. 则由于 V 和 V_i 都满足引理 3.1.1 中 (2) 或 (3) 的假设条件, 故有

$$\lambda_\infty(M) = \sum_V \lambda_\infty(V) = \sum_V \sum_i \lambda_\infty(V_i) = \lambda_\infty(M') + \lambda_\infty(M'').$$

证毕.

练习 3.1.1 证明以下结论:

(1) M 在无穷处的曲率 $\lambda_\infty(M)$ 是紧致集中任意形变的不变量.

(2) 设 M 使得 $\lambda_\infty(M)$ 存在, 曲线 $\alpha : [0, +\infty) \longrightarrow M$ 使得 $\lambda(\alpha)$ 存在且有限, 并且 $M \setminus \alpha$ 连通. 则 $M \setminus \alpha$ 的完备化在无穷处的曲率存在, 并且等于 $\lambda_\infty(M)$.

(3) 若 M 和 M' 在无穷处的曲率存在, 且 M' 可等距嵌入到 M 中, 则

$$\lambda_\infty(M') \leqslant \lambda_\infty(M).$$

§2 曲线间的平行性与伪距离

本节中假设 M 是有限连通的完备非紧 2 维黎曼流形,M 可以具有边界, 并且在无穷处的曲率 $\lambda_\infty(M)$ 存在. 对于从 $\mathbb{R}$ 的区间 I 到 M 的任意曲线 $\alpha : I \longrightarrow M$, 记

$$E(\alpha) := \{t \in I; \alpha|_{I \bigcap [t-\varepsilon, t+\varepsilon]} \text{ 对任意的 } \varepsilon > 0 \text{ 都不是极小线段}\},$$

且

$$\mathcal{C}_M := \{\alpha : [0,+\infty) \to M; \alpha\text{是简单正则分段光滑曲线, 满足 } \lambda_{\text{abs}}(\alpha|_{E(\alpha)}) < +\infty\}.$$

显然, 若 $\alpha \bigcap \partial M = \varnothing$, 则 $\lambda(\alpha|_{E(\alpha)}) = \lambda(\alpha)$.

注 3.2.1 任何完全包含在 ∂M 中的逐段光滑曲线 $\alpha : [0,+\infty) \longrightarrow M$ 都是 $\mathcal{C}_M$ 中的元素, 这是因为若 α 取适当的边, 则有 $\lambda(\alpha|_{E(\alpha)}) = \lambda_+(\alpha) \leqslant \lambda_+(\partial M) < +\infty$.

我们称曲线 $c_i : I_i \longrightarrow M$, $i = 1, \cdots, k$ 围成了 M 的一个区域 D, 若存在 $c_i (i = 1, \cdots, k)$ 的到 D 的良好边界 ∂D 的提升 $\tilde{c}_i : I_i \longrightarrow \partial D$ (见 §1.9), 使得 $\tilde{c}_i$ 是到内的同胚, 并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \tilde{c}_i(I_i) = \partial D$.

$\mathcal{C}_M$ 中的两条曲线 α, β 称为互相交叉的 (或简称交叉的), 若当 $t \to +\infty$ 时, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都趋向于 M 的一个共同的端, 并且不存在连接 $\alpha(0)$ 和 $\beta(0)$ 的曲线, 使得它与 α, β 一起围成上述意义下的 M 的一个区域. $\mathcal{C}_M$ 中的两条曲线 α, β 称为在无穷附近互相交叉的 (或简称在无穷附近交叉), 若对任何 $a, b \geqslant 0$, $\alpha|_{[a,+\infty)}$ 和 $\beta|_{[b,+\infty)}$ 都是互相交叉的.

设 α, β 是 $\mathcal{C}_M$ 中的两条曲线, 使得 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 趋向于 M 的一个共同的端, 但不在无穷附近互相交叉, 即对某个 $a, b \geqslant 0$, $\alpha|_{[a,+\infty)}$ 和 $\beta|_{[b,+\infty)}$ 不相互交叉. 则存在 M 的柱心 C, 使得 $\alpha|_{[a,+\infty)} \bigcap C = \{\alpha(a)\}$, $\beta|_{[b,+\infty)} \bigcap C = \{\beta(b)\}$. 设 V 是包含 $\alpha|_{[a,+\infty)}$ 和 $\beta|_{[b,+\infty)}$ 的 $\overline{M \setminus C}$ 的连通分支. 若 V 是黎曼半柱面, 则 $\alpha|_{[a,+\infty)}$ 和 $\beta|_{[b,+\infty)}$ 将 V 分割为两个闭区域, 记为 $D(\alpha,\beta)$ 和 $D(\beta,\alpha)$, 其中由 V 诱导的 $D(\alpha,\beta)$ (或 $D(\beta,\alpha)$) 的定向与 $\beta|_{[b,+\infty)}$ (或 $\alpha|_{[a,+\infty)}$) 的参数的定向是相容的; 见图 3.2.1.

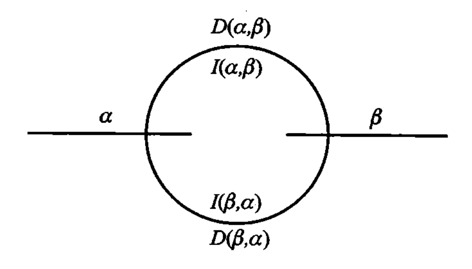


图 3.2.1 V 是黎曼半柱面的情形

当 V 为黎曼半平面时, $\alpha|_{[a,+\infty)}$ 和 $\beta|_{[b,+\infty)}$ 一起将 V 分割为三个闭区域, 其中的一个, 与 α, β 都相交, 记为 D. 我们只定义 $D(\alpha,\beta)$ 和 $D(\beta,\alpha)$ 中的一个为:

若 D 的定向与 β 的参数的定向相容, 则 $D =: D(\alpha,\beta)$; 反之 $D =: D(\beta,\alpha)$; 见图 3.2.2.

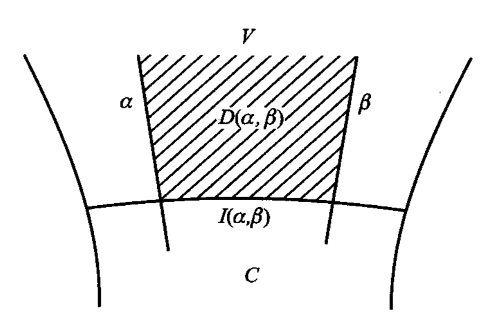


图 3.2.2 V 是黎曼半平面的情形

对任何 $(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \in \{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}$, 记 $I(\hat{\alpha},\hat{\beta}) := D(\hat{\alpha},\hat{\beta})\bigcap \partial V$. 对 $\alpha\mid_{[a,+\infty)}= \beta\mid_{[b,+\infty)}$ 的情形, 记

$$D(\alpha,\beta) := \alpha[a,+\infty) = \beta[b,+\infty), \quad I(\alpha,\beta) := \{\alpha(a)\} = \{\beta(b)\}.$$

注意到, 尽管对给定的 α, β, $D(\alpha,\beta)$ 有许多依赖于 $a,b \geqslant 0$ 和柱心 C 的选择, 我们将选取其中一个. 当然, 这一记号是当 M 为黎曼半平面 H 或黎曼半柱面 N 时定义的.

对于黎曼平面 H, 如下定义 $\mathcal{C}_H$ 上的关系 $\leqslant$: 对于两条曲线 $\alpha,\beta \in \mathcal{C}_H$, 若存在 H 的柱心 C 使得 $D(\alpha,\beta)$ 有定义, 则记 $\alpha \leqslant \beta$. 注意到 $\alpha \leqslant \beta$ 和 $\beta \leqslant \alpha$ 同时成立当且仅当 α 和 β 在 $\mathcal{C}_H$ 中有公共子弧段. 关系 $\leqslant$ 具有自反性和传递性, 但不是反对称的.

定义 3.2.1 函数 $d_\infty : \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M \longrightarrow \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ 定义如下. 设 $\alpha,\beta \in \mathcal{C}_M$ 为两条曲线, 若 $t \to +\infty$ 时 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 趋向于不同的端. 则 $d_\infty(\alpha,\beta) := +\infty$. 假设它们趋向于一个共同的端. 若在无穷附近 α 和 β 互相交叉, 则 $d_\infty(\alpha,\beta) := 0$; 否则, 可以找到如上所述的与 α, β 相对应的 V. 若 V 为黎曼半平面, 则

$$d_\infty(\alpha,\beta) := \begin{cases} \lambda_\infty(D(\alpha,\beta)), & \alpha \leqslant \beta; \\ \lambda_\infty(D(\beta,\alpha)), & \beta \leqslant \alpha. \end{cases}$$

若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$, 则 $D(\alpha,\beta) = D(\beta,\alpha)$ 是 α 和 β 的公共子弧段的像, 并且 $d_\infty(\alpha,\beta) = \lambda_\infty(D(\alpha,\beta)) = \lambda_\infty(D(\beta,\alpha)) = 0$. 若 V 是黎曼半柱面, 则

$$d_\infty(\alpha,\beta) := \min\{\lambda_\infty(D(\alpha,\beta)), \lambda_\infty(D(\beta,\alpha))\}.$$

函数 d_∞ 显然是非负对称的, 并且稍后将证明它是 $\mathcal{C}_M$ 上的伪距离函数. (见定理 3.3.1).

引理 3.2.1　设分段光滑曲线序列 $\{c_i\}_{i=1,2,\cdots}$(逐点) 收敛于分段光滑曲线 c, 则

(1) $\liminf\limits_{i\to\infty} \lambda_{\text{abs}}(c_i) \geqslant \lambda_{\text{abs}}(c)$.

(2) $\liminf\limits_{i\to\infty} \lambda_{\text{abs}}(c_i\,|_{E(c_i)}) \geqslant \lambda_{\text{abs}}(c\,|_{E(c)})$.

证明　(1) 首先我们来说明

子引理 3.2.1　以下的 (i) 和 (ii) 成立:

(i) 存在 c_i 的光滑逼近 $\tilde{c}_i$, 当 $i\to\infty$ 时趋向于 c, 使得对任意两个数 $a<b$,

$$\liminf_{i\to\infty} \lambda_{\text{abs}}(c_i\,|_{[a,b]}) = \liminf_{i\to\infty} \lambda_{\text{abs}}(\tilde{c}_i\,|_{[a,b]}).$$

(ii) 进而, 对任意两个数 $a<b$, 存在 a_i 和 b_i, 满足对任意的 i, 有 $a\leqslant a_i<b_i\leqslant b$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$, $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$, 且

$$\lim_{i\to\infty} \lambda(\tilde{c}_i\,|_{[a_i,b_i]}) = \lambda(c\,|_{[a,b]}).$$

若子引理成立, 则由 (i) 和 (ii) 可知对任意的 $a<b$,

$$\liminf_{i\to\infty} \lambda_{\text{abs}}(c_i\,|_{[a,b]}) \geqslant |\,\lambda(c\,|_{[a,b]})\,|,$$

则由 a, b 的任意性可知引理的 (1) 成立.

子引理 3.2.1 的证明　(i) 证明容易得到, 我们将它留给读者.

(ii) 对于任意 $t\in[a,b], i=1,2,\cdots$, 记 $\sigma_{i,t}$ 为 $c(t)$ 到 $\tilde{c}_i(t)$ 的极小线段. 记

$$\delta_i := \sup_{t\in[a,b]} d(c(t),\tilde{c}_i(t)),$$

$$\theta_i(t) := \angle(\dot{c}(t),\dot{\sigma}_{i,t}(0)),\quad \tilde{\theta}_i(t) := \angle(\dot{\tilde{c}}_i(t),-\dot{\sigma}_{i,t}(L(\sigma_{i,t})));$$

见图 3.2.3.

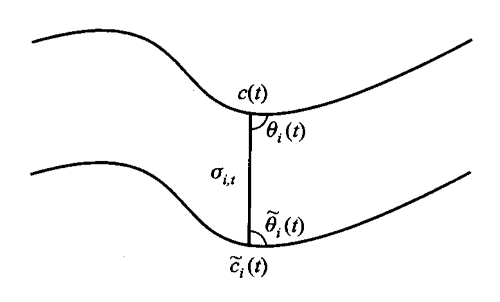


图 3.2.3

选取 $\tilde{c}_i$ 使得对任意的 t, $\tilde{c}_i(t) \neq c(t)$. 则 $\sigma_{i,t}$ 非平凡, 故对所有 $t \in [a,b]$, $\theta_i(t)$ 和 $\tilde{\theta}_i(t)$ 有定义. 假设 i 充分大, 我们来证明:

子引理 3.2.2 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $t \in [a,b]$, 存在 $T = T(\varepsilon, t) \in [a,b]$, 使得 $|t - T| \leqslant \delta_i/\varepsilon$, 且 $|\cos\theta_i(T) + \cos\tilde{\theta}_i(T)| \leqslant \varepsilon$.

子引理 3.2.2 的证明 只需要证明, 若三个数 $t_1 < t_2$ 和 $\varepsilon > 0$ 满足对任意 $t \in (t_1, t_2)$, $|\cos\theta_i(t) + \cos\tilde{\theta}_i(t)| > \varepsilon$, 则 $t_2 - t_1 < \delta_i/\varepsilon$. 由于 i 假设充分大, 故 $\sigma_{i,t}$ 被唯一确定, 因此 $\theta_i(t)$ 和 $\tilde{\theta}_i(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 上连续.

对于 $\forall t \in (t_1, t_2)$, $\cos\theta_i(t) + \cos\tilde{\theta}_i(t) > \varepsilon$ 的情形, 由第一变分公式得

$$\begin{aligned} d(c(t_2), \tilde{c}_i(t_2)) - d(c(t_1), \tilde{c}_i(t_1)) &= \int_{t_1}^{t_2} (\cos\theta_i(t) + \cos\tilde{\theta}_i(t))\mathrm{d}t \\ &> \varepsilon(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

上式的左边小于或等于 δ_i, 因此

$$t_2 - t_1 < \delta_i/\varepsilon.$$

对于任意 $t \in (t_1, t_2)$, $\cos\theta_i(t) + \cos\tilde{\theta}_i(t) < -\varepsilon$ 的情形, 由类似的讨论可得

$$t_2 - t_1 < \delta_i/\varepsilon.$$

证毕.

我们继续子引理 3.2.1 第 (ii) 部分的证明. 可以找到正数序列 ε_i, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = \lim\limits_{i\to\infty} \delta_i/\varepsilon_i = 0$. 应用子引理 3.2.2, 记 $a_i := T(\varepsilon_i, a)$, $b_i := T(\varepsilon_i, b)$, 则有

$$\begin{gathered} a \leqslant a_i, \quad \lim_{i\to\infty} a_i = a, \quad b_i \leqslant b, \quad \lim_{i\to\infty} b_i = b, \\ \lim_{i\to\infty} (\theta_i(a_i) + \tilde{\theta}_i(a_i)) = \lim_{i\to\infty} (\theta_i(b_i) + \tilde{\theta}_i(b_i)) = \pi. \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

现在选取充分接近 $c(a)$ (或 $c(b)$) 的点 p (或 q), 使得连接 p 和 $c(a)$ (或 $c(b)$) 的极小线段是唯一的. 设 $\xi_i, \tilde{\xi}_i, \eta_i, \tilde{\eta}_i$ 分别是从 p, p, q, q 到 $c(a_i), \tilde{c}_i(a_i), c(b_i), \tilde{c}_i(b_i)$ 的四条极小线段. 设 A_i 和 B_i 分别是由三角形 $\sigma_{i,a_i} \bigcup \xi_i \bigcup \tilde{\xi}_i$ 和 $\sigma_{i,b_i} \bigcup \eta_i \bigcup \tilde{\eta}_i$ 围成的区域; 见图 3.2.4. 可以选取连接 p, q 的曲线 ζ, 使得两个四边形 $c \bigcup \xi_i \bigcup \zeta \bigcup \eta_i$ 和 $\tilde{c}_i \bigcup \tilde{\xi}_i \bigcup \zeta \bigcup \tilde{\eta}_i$ 分别围成圆盘, 记为 D_i 和 $\tilde{D}_i$. 当 $i \to \infty$ 时, D_i 和 $\tilde{D}_i$ 趋向于相同的极限圆盘 D, 其边界是顶点为 $c(a), p, q, c(b)$ 的四边形. 故 $\lim\limits_{i\to\infty} (\angle_{c(a_i)} A_i + \angle_{\tilde{c}_i(a_i)} A_i) = \pi$, 其中 $\angle_x R$ 是区域 R 在点 $x \in \partial R$ 的内角. 由此以及 (3.2.1) 可得

$$\lim_{i\to\infty} \angle_{c(a_i)} D_i = \lim_{i\to\infty} \angle_{\tilde{c}_i(a_i)} \tilde{D}_i = \angle_{c(a)} D,$$

并且

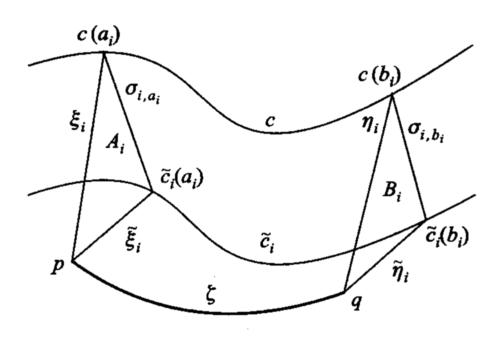


图 3.2.4

$$\lim_{i\to\infty}\angle_{c(b_i)}D_i=\lim_{i\to\infty}\angle_{\tilde{c}_i(b_i)}\tilde{D}_i=\angle_{c(b)}D.$$

由 $\lim\limits_{i\to\infty}\angle_p A_i=0$ 和 $\lim\limits_{i\to\infty}\angle_q B_i=0$ 可得

$$\lim_{i\to\infty}\angle_p D_i=\lim_{i\to\infty}\angle_p\tilde{D}_i=\angle_p D,$$
$$\lim_{i\to\infty}\angle_q D_i=\lim_{i\to\infty}\angle_q\tilde{D}_i=\angle_q D.$$

进一步有

$$\lim_{i\to\infty}c(D_i)=\lim_{i\to\infty}c(\tilde{D}_i)=c(D).$$

因此应用 Gauss-Bonnet 定理, 可得

$$\lambda(c\,|_{[a,b]})=\lim_{i\to\infty}\lambda(c\,|_{[a_i,b_i]})=\lim_{i\to\infty}\lambda(\tilde{c}_i\,|_{[a_i,b_i]}),$$

至此完成了子引理 3.2.2 的证明. 证毕.

由此便证明了引理 3.2.1 的第 (1) 部分.

下面来证明引理 3.2.1 的第 (2) 部分. 由于 $\lim\limits_{i\to\infty}c_i\bigcap\partial M\subset c\bigcap\partial M$, 故有 $\lim\limits_{i\to\infty}c_i\,|_{E(c_i)}\supset c\,|_{E(c)}$, 这与 (1) 一起证明了 (2). 于是完成了引理 3.2.1 的证明. 证毕.

定义 3.2.2 (正则收敛) 设 $\alpha:[0,+\infty)\longrightarrow M$ 是一条曲线, 且 $\{\alpha_i:[0,a_i)\longrightarrow M\}_{i=1,2,\cdots}$ 是曲线的序列, 使得每个 $\lambda(a_i)$ 都存在, 并且 $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=+\infty$, 其中 $0\leqslant a_i\leqslant+\infty$. 称 $\{\alpha_i\}$ 正则收敛于 α, 若 $i\to\infty$ 时 $\{\alpha_i\}$ 收敛于 α, 并且以下的 (P1) 和 (P2) 成立:

(P1) 对取定的 $p\in M$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\liminf\limits_{i\to\infty}d(p,\alpha_i\,|_{[t,a_i)})=+\infty$.

(P2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\limsup\limits_{i\to\infty}\lambda_{\text{abs}}(\alpha_i\,|_{[t,a_i)\bigcap E(\alpha_i)})=0$.

这个收敛的概念称为正则收敛.

例 3.2.1 (1) 设 $\alpha\in\mathcal{C}_M$, $\alpha_i=\alpha\,|_{[0,a_i]}$, $a_i\to\infty$, 则 $\{\alpha_i\}$ 正则收敛于 α.

(2) 当极小线段序列收敛于射线, 则这是正则收敛.

命题 3.2.1 若曲线序列 $\{\alpha_i : [0, a_i) \to M\}$ 正则收敛于曲线 $\alpha : [0, +\infty) \to M$, 则 $\alpha \in \mathcal{C}_M$.

证明 由 (P1) 知 α 是正则的. 由 (P2) 和引理 3.2.1 可证明 $\lambda(\alpha|_{E(\alpha)})$ 的存在性和有限性. 证毕.

定义 3.2.3 (平行性) 两条曲线 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_M$ 称为平行的, 若存在两个分段光滑曲线序列 $\{\alpha_i : [0, a_i] \to M\}$ 和 $\{\beta_i : [0, b_i] \to M\}$ 分别正则收敛于 α 和 β, 使得对每个 i, $\alpha_i(a_i) = \beta_i(b_i)$.

显然, 如果两条曲线 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_M$ 平行, 则当 $t \to +\infty$ 时 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 趋向于共同的端点.

设 X 是可能具有边界的黎曼流形 (不必要是 2 维).

定义 3.2.4 (渐近关系) 称 X 中的射线 σ 渐近于 X 中的射线 τ, 若存在趋向于 σ 的极小线段序列 $\{\sigma_i : [0, s_i] \to X\}$ 和趋向于 $+\infty$ 的正数序列 $\{t_i\}$, 使得对每个 i, $\sigma_i(s_i) = \tau(t_i)$, 称这样的射线 σ 是 τ 的余射线.

于是当 M 中的一条射线渐近于 M 中的另一条射线时, 它们为平行的. 注意到渐近关系不一定是对称的.

命题 3.2.2 若 X 中射线的序列 $\sigma_i, i = 1, 2, \cdots$, 渐近于 X 中的射线 τ, 并且该序列收敛于 X 中的射线 σ, 则 σ 渐近于 τ.

证明 假设 σ_i 是 X 中渐近于 τ 的射线序列, 并且收敛于 X 中的射线 σ. 则对于每个 i, 存在极小线段序列 $\sigma_{i,j} : [0, s_{i,j}] \to X, j = 1, 2, \cdots$, 使得对任意的 j, $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_{i,j} = \sigma_i$, $\sigma_i(s_{i,j}) = \tau(t_{i,j})$, 其中 $t_{i,j}$ 是某个当 $j \to \infty$ 时趋向于 ∞ 的序列. 如果对每个 i, 取充分大的 $j(i)$, 则 $i \to \infty$ 时 $\sigma_{i,j(i)}$ 收敛于 σ, $t_{i,j(i)}$ 收敛于 ∞. 证毕.

设 H 是黎曼半平面, 在无穷处曲率存在.

引理 3.2.2 设 c 是 H 中的紧致弧段, $\{p_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 是 H 中趋向于 ∞ (即 $d(p_i, c) \to +\infty$) 的点列. 假设给定曲线 $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \cdots$ 都连接 c 和 p_i, 并且对于每个 i, c 的一个子弧段, α_i, β_i 围成一个紧致可缩的区域 D_i (见图 3.2.5) . 若序列 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$ 分别正则收敛于 $\mathcal{C}_H$ 中的曲线 α 和 β, 则当 $i \to \infty$ 时 D_i 在 p_i 处的内角趋向于 0, 并且 $d_\infty(\alpha, \beta) = 0$.

证明 极限区域 $D := \lim\limits_{i\to\infty} D_i$ 由 α, β 和 c 中从 $\alpha(0)$ 到 $\beta(0)$ 的子弧段所围成. 因此, $\lim\limits_{i\to\infty} (\lambda(\partial D_i) - (\pi - \angle_{p_i} D_i)) = \lambda(\partial D)$, 由此及 Gauss-Bonnet 定理知,

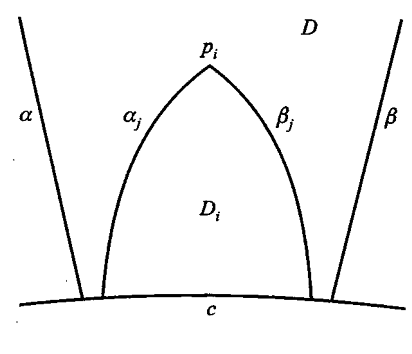


图 3.2.5

对 H 的任何紧致子集 K,

$$\begin{aligned} c(D\bigcap K) &= \lim_{i\to\infty} c(D_i\bigcap K) = \lim_{i\to\infty}(c(D_i) - c(D_i \setminus K)) \\ &= \lim_{i\to\infty}(2\pi - \lambda(\partial D_i) - c(D_i \setminus K)) \\ &= \lim_{i\to\infty}(\pi - \lambda(\partial D) + \angle_{p_i} D_i - c(D_i \setminus K)). \end{aligned}$$

由于 $c(D_i \setminus K) \leqslant \int_{H\setminus K} G_+ \mathrm{d}H$, 故

$$\pi - c(D\bigcap K) - \lambda(\partial D) + \limsup_{i\to\infty} \angle_{p_i} D_i \leqslant \int_{H\setminus K} G_+ \mathrm{d}H.$$

若 K 递减趋向于 H, 则 $c(D\bigcap K)$ 收敛于 $c(D)$, 并且 $\int_{H\setminus K} G_+ \mathrm{d}H$ 收敛于 0. 因此

$$d_\infty(\alpha,\beta) + \limsup_{i\to\infty} \angle_{p_i} D_i \leqslant 0.$$

证毕.

命题 3.2.3　若 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_H$ 为平行的, 则 $d_\infty(\alpha,\beta) = 0$.

证明　若 α 和 β 在无穷附近相互交叉, 则结论是平凡的. 假设 α 和 β 在无穷处不相互交叉且 $\alpha \leqslant \beta$, 则可以找到 ∂H 的紧致子弧段 $c : [0, l] \longrightarrow \partial H$, 使得 c 的参数的方向与 ∂H 的定向相容. 通过延伸或截取 α 和 β, 可以假设 $\alpha \bigcap c = \{\alpha(0)\}$, $\beta \bigcap c = \{\beta(0)\}$. 由于 α 和 β 平行, 存在曲线序列 $\{\alpha_i : [0, a_i] \longrightarrow H\}$ 和 $\{\beta_i : [0, b_i] \longrightarrow H\}$ 分别正则收敛于 α 和 β, 使得对每个 i, $\alpha_i(a_i) = \beta_i(b_i) := p_i$, $\alpha_i \bigcap c = \{\alpha_i(0)\} = \{\alpha(0)\}$, 且 $\beta_i \bigcap c = \{\beta_i(0)\} = \{\beta(0)\}$ (见图 3.2.6) . 记 H_i 为 $H \setminus \Delta(\alpha_i \bigcup \beta_i)$ 的完备化, 其中 $\Delta(A)$ 为 H 的子集 A 与 $H \setminus A$ 的所有有界连通分支的并集. 设 $\hat{p}_i$ 是 $\partial\Delta(\alpha_i \bigcup \beta_i)$ 中一点, 使得

$$d_{H_i}(\hat{p}_i, c) = \max_{x\in\partial\Delta(\alpha_i\bigcup\beta_i)} d_{H_i}(x, c),$$

其中 $p_i \notin H_i$, d_{H_i} 为 H_i 上的内部距离函数 (即 $d_{H_i}(x,y)$ 是 H_i 中所有连接 x 和 y 的曲线长度的下确界), 且

$$\hat{p}_i := p_i,$$

其中 $p_i \in H_i$ (见图 3.2.7) .

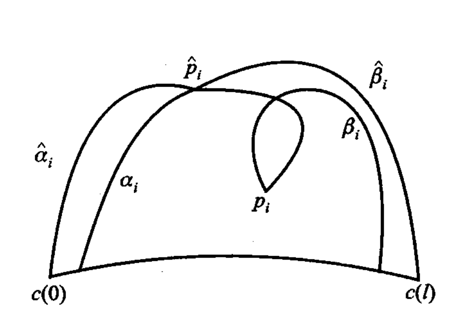


图 3.2.6 $p_i \notin H_i$ 的情形

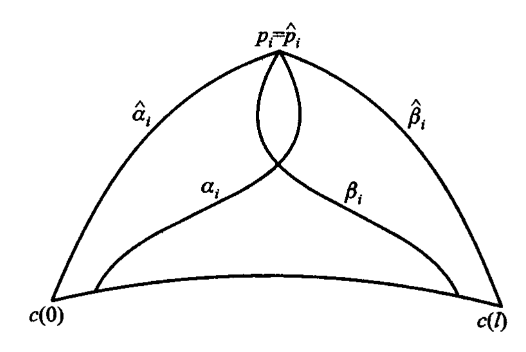


图 3.2.7 $p_i \in H_i$ 的情形

现在选取 H_i 中连接 $c(0)$ $(c(l))$ 和 $\hat{p}_i$ 的极小线段 $\hat{\alpha}_i : [0, \hat{a}_i] \longrightarrow H_i$ ($\hat{\beta}_i : [0, \hat{b}_i] \longrightarrow H_i$) . 注意到 c, $\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\beta}_i$ 围成了 H 中包含 $\Delta(\alpha_i \bigcup \beta_i)$ 的一个紧致可缩区域. 假设选取子序列 $\{\hat{\alpha}_i\}$ 和 $\{\hat{\beta}_i\}$ 分别收敛于两条曲线 $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : [0, +\infty) \longrightarrow H$, 则 $\hat{\alpha} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \hat{\beta}$. 我们来证明 $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}$ 和 $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{\beta}_i = \hat{\beta}$ 是正则收敛. 定义 3.2.2 中的条件 (P1) 容易验证, 因此我们只证明条件 (P2). 设 $\xi, \eta : [0, +\infty) \to \partial H$ 分别为两条从 $c(0)$ 和 $c(l)$ 出发的曲线, 使得 $\xi\mid_{(0,+\infty)}$ 和 $\eta\mid_{(0,+\infty)}$ 是 $\partial H \setminus c$ 的两个分支. 由于 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$ 正则收敛于 α 和 β, 故存在正数序列 $\{s_t\}_{t\geqslant 0}$, 使得当 $t \to +\infty$ 时 $s_t \to +\infty$, 并且对所有充分大的 i 和所有 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_i[t, \hat{a}_i] \bigcap (\alpha_i \bigcup \beta_i \bigcup \xi \bigcup \eta) \\ &\subset \alpha_i[s_t, a_i] \bigcup \beta_i[s_t, b_i] \bigcup \xi[s_t, +\infty) \bigcup \eta[s_t, +\infty), \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{abs}}(\hat{\alpha}_i\mid_{[t,\hat{a}_i]\bigcap E(\hat{\alpha}_i)}) \leqslant\ & \lambda_{\text{abs}}(\alpha_i\mid_{[s_t,a_i]\bigcap E(\alpha_i)}) + \lambda_{\text{abs}}(\beta_i\mid_{[s_t,a_i]\bigcap E(\beta_i)}) \\ & + \lambda_{\text{abs}}(\xi\mid_{[s_t,+\infty)\bigcap E(\xi)}) + \lambda_{\text{abs}}(\eta\mid_{[s_t,+\infty)\bigcap E(\eta)}). \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$ 和 $\lim\limits_{i\to\infty} \beta_i = \beta$ 是正则收敛, 并且 $\xi, \eta \in \mathcal{C}_H$, 故有

$$\lim_{t\to+\infty} \limsup_{i\to\infty} \lambda_{\text{abs}}(\hat{\alpha}_i\mid_{[t,\hat{a}_i]\bigcap E(\hat{\alpha}_i)}) = 0.$$

因此 $\{\hat{\alpha}_i\}$ 正则收敛于 $\hat{\alpha}$. 由类似的讨论可知 $\{\hat{\beta}_i\}$ 正则收敛于 $\hat{\beta}$.

由引理 3.2.2 可知 $d_\infty(\hat{\alpha},\hat{\beta})=0$, 所以

$$d_\infty(\alpha,\beta)=\lambda_\infty(D(\alpha,\beta))\leqslant\lambda_\infty(D(\hat{\alpha},\hat{\beta}))=d_\infty(\hat{\alpha},\hat{\beta})=0.$$

证毕.

引理 3.2.3　对任意两条在无穷附近相互交叉的曲线 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}_H$, 存在两条曲线 $\sigma_-,\sigma_+\in\mathcal{C}_H$, 使得

$$\sigma_-\leqslant\alpha,\beta\leqslant\sigma_+,\ d_\infty(\sigma_\pm,\alpha)=d_\infty(\sigma_\pm,\beta)=0.$$

证明　如若必要则对 α 和 β 进行延拓, 假设 $\alpha(0)$ 和 $\beta(0)$ 都在 ∂H 上. 设具单位速度的参数表示 $\partial H:\mathbb{R}\longrightarrow\partial H$ 关于 H 的定向是正的, 并且对充分大的 $t\geqslant 0$, H' 是 $H\setminus(\alpha\bigcup\beta)$ 包含 $\partial H(-t)$ 的分支的闭包 (见图 3.2.8) . 由于 α 和 β 都是简单的, 存在 $p_i\in H'\bigcap\alpha\bigcap\beta$, $i=1,2,\cdots$ 趋向于无穷. 对每个 i, 选取 H' 中从一个固定点 $p_0\in\partial H'$ 到 p_i 的极小线段σ_i. 记 D_i 是 H' 中由 σ_i 围成的紧致区域, $\bigcup\limits_i D_i$ 的闭包是 H' 中由极限射线 $\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i:=\sigma_-$ 围成的区域.

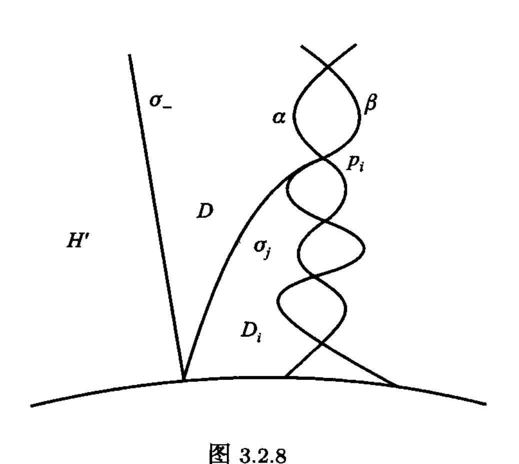


图 3.2.8

由与命题 3.2.3 相似的讨论可知 σ_i 正则收敛于 σ_-. 应用命题 3.2.3 得 $\sigma_-\in\mathcal{C}_H$ 且 $d_\infty(\sigma_-,\alpha)=d_\infty(\sigma_-,\beta)=0$. 由相同的方法可以证明 σ_+ 的存在性. 证毕.

引理 3.2.4　(1) 若三条曲线 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{C}_H$ 满足 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$, 则

$$d_\infty(\alpha,\gamma)=d_\infty(\alpha,\beta)+d_\infty(\beta,\gamma).$$

(2) 若四条曲线 $\alpha,\beta,\gamma_-,\gamma_+\in\mathcal{C}_H$ 满足 α 和 β 在无穷附近相互交叉, 并且 $\gamma_-\leqslant\alpha,\beta\leqslant\gamma_+$, 则

$$d_\infty(\alpha,\gamma_\pm)=d_\infty(\beta,\gamma_\pm)$$

(见图 3.2.10).

(3) 若三条曲线 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}_H$ 满足 α 和 β, β 和 γ 分别在无穷附近相互交叉, 并且 $\alpha \leqslant \gamma$, 则

$$d_\infty(\alpha, \gamma) = 0$$

(见图 3.2.9).

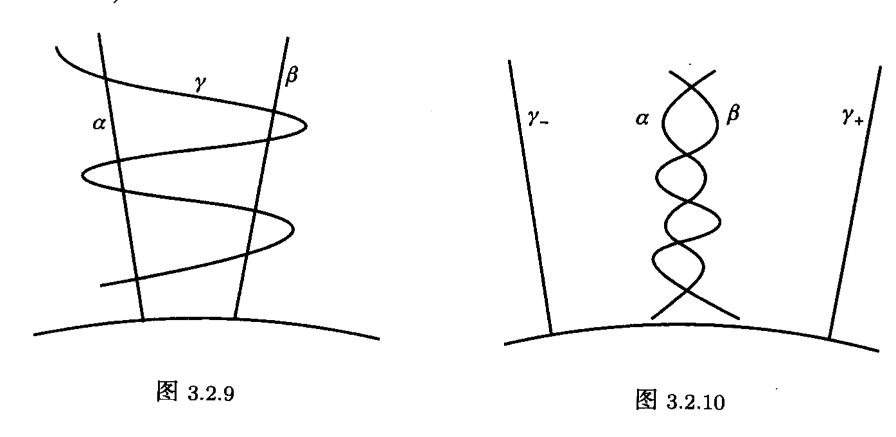


图 3.2.9　　图 3.2.10

证明 (1) 由引理 3.1.1 显然可得.

(2) 对于 $D(\gamma_-, \gamma_+)$ 中的 α 和 β, 在某个柱心上应用引理 3.2.3, 可以找到 $\sigma_\pm$ 满足 $\gamma_- \leqslant \sigma_- \leqslant \alpha, \beta \leqslant \sigma_+ \leqslant \gamma_+$, 且 $d_\infty(\sigma_\pm, \alpha) = d_\infty(\sigma_\pm, \beta) = 0$. 因此由 (1) 得

$$d_\infty(\alpha, \gamma_\pm) = d_\infty(\sigma_\pm, \gamma_\pm) = d_\infty(\beta, \gamma_\pm).$$

(3) 由引理 3.2.3, 存在 $\sigma_-, \sigma_+ \in \mathcal{C}_H$, 使得 $\sigma_- \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \sigma_+$, 且 $d_\infty(\sigma_-, \alpha) = d_\infty(\sigma_-, \beta) = d_\infty(\beta, \sigma_+) = d_\infty(\gamma, \sigma_+) = 0$. 因此

$$d_\infty(\alpha, \gamma) = d_\infty(\sigma_-, \sigma_+) = d_\infty(\sigma_-, \beta) + d_\infty(\beta, \sigma_+) = 0.$$

证毕.

命题 3.2.4 函数 $d_\infty : \mathcal{C}_H \times \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ 是伪距离函数.

证明 只需对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}_H$ 证明三角不等式

$$d_\infty(\alpha, \gamma) \leqslant d_\infty(\alpha, \beta) + d_\infty(\beta, \gamma).$$

若 $d_\infty(\alpha, \gamma) = 0$, 则不等式是平凡的. 不失一般性, 可以假设 $d_\infty(\alpha, \gamma) > 0$, 且 $\alpha \leqslant \gamma$. 若 $\beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ 或 $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ 成立, 则应用引理 3.2.4 的 (1) 可得三角不等式. 若以上都不成立, 由引理 3.2.4 的 (2) 和 (3) 可得三角不等式. 证毕.

§3 黎曼半柱面及其万有覆盖

设黎曼半柱面 N 在无穷处的曲率存在.

引理 3.3.1　若 $\lambda_\infty(N)=0$, 则对任意的 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}_N$, 有 $d_\infty(\alpha,\beta)=0$.

证明　设曲线 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}_N$, 若 α,β 在无穷附近相互交叉, 则结论是平凡的. 否则,

$$d_\infty(\alpha,\beta)\leqslant\lambda_\infty(D(\alpha,\beta))+\lambda_\infty(D(\beta,\alpha))=\lambda_\infty(N)=0.$$

证毕.

设 $pr:\tilde{N}\longrightarrow N$ 是万有覆盖. 对任意曲线 $\alpha\in\mathcal{C}_N$, $n\in\mathbb{Z}$, 记 α^n 为 α 在 $\tilde{N}$ 中满足 $\cdots\leqslant\alpha^{-1}\leqslant\alpha^0\leqslant\alpha^1\leqslant\cdots$ 的所有不同提升. 设 σ 是 N 中的射线, 满足 $\sigma\bigcap\partial N=\{\sigma(0)\}$. 则对所有 $n\in\mathbb{Z}$, σ^n 互不相交, 特别地它们互相不交叉. 对 $m<n$, 设 $I(\sigma^m,\sigma^n)$ 是 $\partial\tilde{N}$ 从 $\sigma^m(0)$ 到 $\sigma^n(0)$ 的子弧段, $D(\sigma^m,\sigma^n)$ 是 $\tilde{N}$ 中由 σ^n, $I(\sigma^m,\sigma^n)$ 和 σ^m 围成的黎曼半平面; 见图 3.3.1. (边界 $\partial\tilde{N}$ 可认为是 $\tilde{N}$ 的柱心.)

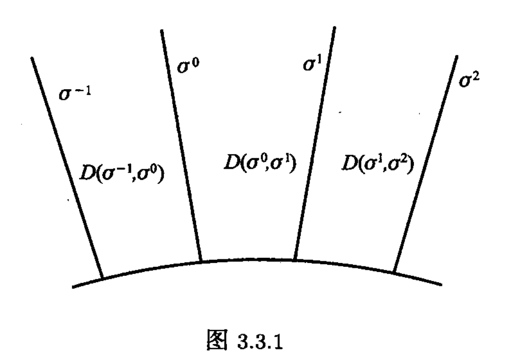


图 3.3.1

练习 3.3.1　证明任意两条曲线 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}_{D(\sigma^m,\sigma^n)}$, $m<n$, 满足

$$d_\infty(pr\circ\alpha,pr\circ\beta)\leqslant d_\infty(\alpha,\beta).$$

引理 3.3.2　对任意两个整数 $m<n$ 和 $D(\sigma^m,\sigma^n)$ 中连接 σ^m 和 σ^n 的任意曲线 c, 有

$$|\lambda(c)|\geqslant(n-m)\left(-\lambda(\partial N)-\int_N G_+\mathrm{d}N\right)-\pi.$$

证明　对 $D(\sigma^m,\sigma^n)$ 中由 σ^m, $I(\sigma^m,\sigma^n)$, σ^n 和 c 围成的紧致区域 D, 应用 Gauss-Bonnet 定理. 对适当的 c, 有

$$(n-m)\int_N G_+\mathrm{d}N\geqslant c(D)\geqslant-\pi-\lambda(c)-(n-m)\lambda(\partial N).$$

证毕.

引理 3.3.3 若 $\lambda_\infty(N)>0$, 则存在 N 的黎曼子半柱面 N', 使得

$$-\lambda(\partial N')-\int_{N'}G_+\mathrm{d}N>0.$$

证明 设 N' 是 N 的黎曼子半柱面, 使得 $\partial N'$ 与 σ 只在一点处垂直相交. 则 N' 是 N 的端的邻域, 且只需证明若 N' 递减并且 $N\setminus N'$ 趋向于 N, 则 $-\lambda(\partial N')-\displaystyle\int_{N'}G_+\mathrm{d}N$ 趋向于 $\lambda_\infty(N)$. 事实上, 若 $\lambda_\infty(N)<+\infty$ (或等价地若 $c(N)$ 有限), 则

$$-\lambda(\partial N')-\int_{N'}G_+\mathrm{d}N=\lambda_\infty(N)-\int_{N'}G_-\mathrm{d}N,$$

并且上式等号右边趋向于 $\lambda_\infty(N)$. 若 $\lambda_\infty(N)=+\infty$ (或等价地若 $c(N)=-\infty$), 则

$$-\lambda(\partial N')=-\lambda(\partial N)-c(N\setminus N'),$$

它趋向于 $+\infty$, 并且 $\displaystyle\int_{N'}G_+\mathrm{d}N$ 趋向于 0. 证毕.

引理 3.3.4 若 $\lambda_\infty(N)>0$, 则任意满足 $pr\circ\tilde\alpha\in\mathcal{C}_N$ 的曲线 $\tilde\alpha:[0,+\infty)\longrightarrow\tilde N$ 完全包含在 $D(\sigma^m,\sigma^n)$ 之中, 其中整数 $m<n$.

证明 设 N' 如引理 3.3.3 中的假设, $\tilde\alpha:[0,+\infty)\longrightarrow\tilde N$ 是满足 $pr\circ\tilde\alpha\in\mathcal{C}_N$ 的曲线, 则存在 $t\geqslant 0$, 使得 $pr\circ\tilde\alpha\mid_{[t,+\infty)}\subset N'$. 于是对充分大的 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\mid\lambda(\tilde\alpha\mid_{[t,+\infty)})\mid<k\left(-\lambda(\partial N')-\int_{N'}G_+\mathrm{d}N\right)-\pi.$$

于是由引理 3.3.2 可得结论. 证毕.

命题 3.3.1 函数 $d_\infty:\mathcal{C}_N\times\mathcal{C}_N\longrightarrow\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ 是伪距离函数.

证明 由引理 3.3.1, 只需考虑 $\lambda_\infty(N)>0$ 的情形. 对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{C}_N$, 为证明三角不等式

$$d_\infty(\alpha,\gamma)\leqslant d_\infty(\alpha,\beta)+d_\infty(\beta,\gamma),$$

我们选取由 ∂N 出发的射线 σ. 由引理 3.3.4, 存在两个整数 $m<n$, 和 α,β,γ 在 $D(\sigma^m,\sigma^n)$ 中的提升 $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$, 使得

$$d_\infty(\alpha,\beta)=d_\infty(\tilde\alpha,\tilde\beta),\quad d_\infty(\beta,\gamma)=d_\infty(\tilde\beta,\tilde\gamma).$$

对 $H:=D(\sigma^m,\sigma^n)$ 应用命题 3.2.4 得

$$d_\infty(\alpha,\gamma)\leqslant d_\infty(\tilde\alpha,\tilde\gamma)\leqslant d_\infty(\tilde\alpha,\tilde\beta)+d_\infty(\tilde\beta,\tilde\gamma)=d_\infty(\alpha,\beta)+d_\infty(\beta,\gamma).$$

证毕.

对于在无穷处具有曲率的有限连通 2 维流形 M, 可以得到以下结论:

定理 3.3.1 函数 $d_\infty : \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ 是伪距离函数.

证明 由于对 $\overline{M\setminus C}$ 的所有连通分支 V, $\mathcal{C}_M$ 分割为分支 $\mathcal{C}_V$, 其中 C 是 M 的柱心. 由命题 3.2.4 和 3.3.1 可得定理结论. 证毕.

引理 3.3.5 假设 $\lambda_\infty(N) > 0$, $\{\widetilde{\alpha}_i : [0, a_i) \to \widetilde{N}\}$ 是收敛于 $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{C}_{\widetilde{N}}$ 的分段光滑曲线序列. 若 $\{pr \circ \widetilde{\alpha}_i\}$ 正则收敛于 $pr \circ \widetilde{\alpha}$, 则存在不依赖于 i 的两个整数 $m < n$, 使得对所有的 i, $\widetilde{\alpha}_i$ 和 α 完全包含在 $D(\sigma^m, \sigma^n)$ 中.

证明 由引理 3.3.3, 代入 N 的子半柱面, 可假设

$$\epsilon := -\lambda(\partial N) - \int_N G_+ \mathrm{d}N > 0.$$

由引理 3.3.4, 存在整数 $m' < n'$, 使得 $\tilde{\alpha}$ 完全包含在 $D(\sigma^{m'}, \sigma^{n'})$ 的内部. 定义两个整数 m, n 满足

$$m' - m = n - n' = \min\{k \in \mathbb{N}; k > \pi/\epsilon\}.$$

假设存在 $\{\tilde{\alpha}_i\}$ 的子序列 $\{\tilde{\alpha}_{j(i)}\}$, 使得 $\alpha_{j(i)}$ 不包含在 $D(\sigma^m, \sigma^n)$ 中. 不失一般性, 假设每个 $\tilde{\alpha}_{j(i)}$ 与 σ^m 和 $\sigma^{m'}$ 都相交 (见图 3.3.2) . 由于 $i \to \infty$ 时 $\widetilde{\alpha}_{j(i)}$ 趋向于 $\tilde{\alpha}$, 每个 $\tilde{\alpha}_{j(i)}$ 具有连接 σ^m 和 $\sigma^{m'}$ 的子弧段 $\tilde{\alpha}_{j(i)}\mid_{[t_i, t_i']}$, 并且 t_i 和 t_i' 都趋向于无穷. 由引理 3.3.2 得

$$\lambda_{\mathrm{abs}}(\tilde{\alpha}_{j(i)}\mid_{[t_i, a_{j(i)})}) \geqslant \mid \lambda(\tilde{\alpha}_{j(i)}\mid_{[t_i, t_i']}) \mid \geqslant (m' - m)\epsilon - \pi > 0,$$

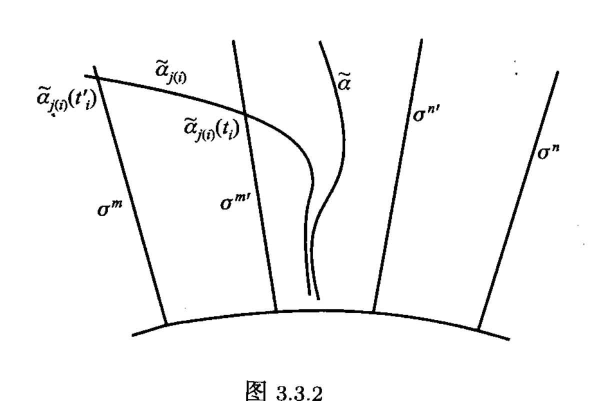


图 3.3.2

这与定义 3.2.2 的 (P2) 中的 $pr \circ \tilde{\alpha}_{j(i)}$ 矛盾. 证毕.

定理 3.3.2 若 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_M$ 为平行的, 则 $d_\infty(\alpha, \beta) = 0$.

证明 当 $\lambda_\infty(N)=0$ 时, 结论可由引理 3.3.1 得到, 因此假设 $\lambda_\infty(N)>0$, 并令 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}_N$ 为平行的. 取两个分段光滑曲线序列 $\{\alpha_i:[0,a_i]\to N\}$ 和 $\{\beta_i:[0,b_i]\to N\}$ 分别正则收敛于 α 和 β, 使得 $\alpha_i(a_i)=\beta_i(b_i)$. 对每个 i, 存在 $\alpha_i,\alpha,\beta_i,\beta$ 的提升 $\tilde\alpha_i,\tilde\alpha,\tilde\beta_i,\tilde\beta$, 使得 $\{\tilde\alpha_i\}$ 和 $\{\tilde\beta_i\}$ 分别正则收敛于 $\tilde\alpha$ 和 $\tilde\beta$, 且 $\tilde\alpha_i(a_i)=\tilde\beta_i(b_i)$. 由引理 3.3.5, 存在两个不依赖于 i 的整数 $m<n$, 使得 $\tilde\alpha_i,\tilde\alpha,\tilde\beta_i,\tilde\beta$ 完全包含在 $D(\sigma^m,\sigma^n)$ 之中. 由于 $\{\tilde\alpha_i\}$ 和 $\{\tilde\beta_i\}$ 分别正则收敛于 $\tilde\alpha$ 和 $\tilde\beta$, 应用命题 3.2.3 可得 $d_\infty(\tilde\alpha,\tilde\beta)=0$. 证毕.

§4 理想边界及其拓扑结构

我们给出有限连通且在无穷远处曲率存在的 2 维流形 M 的理想边界的定义.

定义 3.4.1 (理想边界) M 的理想边界 $M(\infty)$ 定义为 $\mathcal{C}_M$ 模 $d_\infty(\cdot,\cdot)=0$ 的商空间. $\mathcal{C}_M$ 上的伪距离函数 d_∞ 诱导了 $M(\infty)$ 上的距离函数, 我们称之为 Tits 距离, 也记作 d_∞. 记 $\alpha(\infty)$ 为 $M(\infty)$ 中 $\alpha\in\mathcal{C}_M$ 的等价类.

理想边界 $M(\infty)$ 具有剖分

$$M(\infty)=\bigcup_V V(\infty),$$

其中对于 M 固定的柱心 C, V 是 $\overline{M\setminus C}$ 的任意连通分支.

引理 3.4.1 对任意 $x\in M(\infty)$ 和 M 的任意紧致子集 K, 存在从 K 出发的射线 σ, 使得 $\sigma(\infty)=x$.

证明 设 $K\subset M$ 是紧致子集, $x\in M(\infty)$. 可以选择曲线 $\alpha\in\mathcal{C}_M$, 使得 $\alpha(\infty)=x$. 对于正数序列 $\{t_i\to+\infty\}$, 设 σ_i 是从 K 到 $\alpha(t_i)$ 的极小线段, $i=1,2,\cdots$. 则存在 $\{\sigma_i\}$ 的子列 $\{\sigma_{j(i)}\}$, 它收敛于从 K 出发的射线 σ. 由于 α 与 σ 平行, 可得 $\sigma(\infty)=x$. 证毕.

设 $\overline{M}^\infty:=M\bigcup M(\infty)$ (不交并), 称之为 M 的紧化. 我们将定义 $\overline{M}^\infty$ 的一个拓扑. 设 D 为 M 中任意有限连通的非紧闭区域, 使得 $\overline{\partial D\setminus C_D}$ 由 $\mathcal{C}_M$ 中有限多条曲线的像组成, 其中 C_D 是 D 的一个柱心, 则 D 在无穷的曲率存在, 并且 $D(\infty)$ 有定义. 存在自然嵌入 $D(\infty)\subset M(\infty)$, 使得 $\overline{D}^\infty:=D\bigcup D(\infty)$ 嵌入到 $\overline{M}^\infty$. 同样 $D':=\overline{M\setminus D}$ 在无穷的曲率存在, 并且 $\overline{D'}^\infty=D'\bigcup D'(\infty)\subset\overline{M}^\infty$, $\overline{D}^\infty\bigcup\overline{D'}^\infty=\overline{M}^\infty$.

设 $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in M}$ 是 M 的标准基本邻域系, 且对 $x\in M(\infty)$, 设 $\mathcal{N}_x$ 是所有 $\overline{D}^\infty$ 的族, 其中 D 满足 $x\notin D'(\infty)$.

定义 3.4.2 ($\overline{M}^{\infty}$ 的拓扑) $\overline{M}^{\infty}$ 的拓扑以 $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in\overline{M}^{\infty}}$ 作为基础邻域系, 通常将 $\overline{M}^{\infty}$ 的拓扑限制在 $M(\infty)$ 上.

很自然地, 包含映射 $M \hookrightarrow \overline{M}^{\infty}$ 是到上同胚. 对于在无穷处曲率存在的黎曼半平面 H, $\mathcal{C}_H$ 上的关系 $\leqslant$ 诱导了 $H(\infty)$ 上的全序关系, 仍记为 $\leqslant$, 与 $H(\infty)$ 上的限制拓扑相容. 注意到 Tits 度量 d_∞ 不必与 $M(\infty)$ 的拓扑相容 (见例 3.5.1) .

一旦定义了 $\overline{M}^{\infty}$ 的标准拓扑, 任何曲线 $\alpha \in \mathcal{C}_M$ 可以自然地连续延拓到 $[0,+\infty]$ 上的曲线, 即当 $t \to +\infty$ 时, $\alpha(t)$ 趋向于 $\alpha(\infty) := \alpha(+\infty)$. 尽管如此, 由于目前我们不清楚 $\overline{M}^{\infty}$ 是否是 Hausdorff 空间, $\alpha(t)$ 在 $t \to +\infty$ 时的极限不一定是唯一的, 稍后我们将证明 $\overline{M}^{\infty}$ 是有界 2 维拓扑流形.

曲线 $\alpha : [0,+\infty] \to \overline{M}^{\infty}$ 称为分段光滑曲线, 若 $\alpha|_{[0,+\infty)} \in \mathcal{C}_M$, 且 $\alpha(+\infty) = \alpha(\infty)$.

引理 3.4.2 设 $\{\alpha_i : [0,a_i] \to \overline{M}^{\infty}\}_{i=1,2,\cdots}$ 是分段光滑曲线序列, $0 \leqslant a_i \leqslant +\infty$. 若 $\{\alpha_i |_{[0,a_i)}\}$ 收敛于曲线 $\alpha \in \mathcal{C}_M$, 则

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i(a_i) = \alpha(\infty).$$

证明 任意给定邻域 $\overline{D}^{\infty} \in \mathcal{N}_{\alpha(\infty)}$, 只要证明对于充分大的 i, $\alpha_i(a_i) \in \overline{D}^{\infty}$. 假设结论不成立, 由于对某个充分大的 $t_0 \geqslant 0$ 有 $\alpha[t_0,+\infty) \subset \mathrm{int}D$, 故存在序列 $b_i \to \infty$, 使得对所有充分大的 i, $\alpha_i(b_i) \in \mathrm{int}D$. 由于 $\alpha_i(a_i) \notin \overline{D}^{\infty}$, 则对所有充分大的 i, $\alpha_i[b_i,a_i) \bigcap \partial D \neq \varnothing$, 所以 α 平行一条包含在 $\partial D = \partial D'$ 且属于 $\mathcal{C}_{D'}$ 的曲线, 这证明了 $\alpha(\infty) \in D'(\infty)$, 与 $\overline{D}^{\infty} \in \mathcal{N}_{\alpha(\infty)}$ 矛盾. 证毕.

设 C 是 M 的柱心. 集合 $\overline{\partial M \setminus C}$ 由 $\mathcal{C}_M$ 中有限多条不相交的曲线组成. 记这些边界曲线为 $\partial_1, \cdots, \partial_k : [0,+\infty) \to \partial M$. 令

$$\mathcal{R}_C := \{M \text{ 中所有从 } C \text{ 出发的射线}\} \bigcup \{\partial_1, \cdots, \partial_k\}.$$

对任意 $p \in M \setminus C$, 记从 C 到 p 的极小线段集合为 $\mathcal{R}'_{C,p}$, 并记

$$\mathcal{R}_{C,p} := \begin{cases} \mathcal{R}'_{C,p}, & \text{若 } p \text{ 不在任何 } \partial_i \text{ 中;} \\ \mathcal{R}'_{C,p} \bigcup \{\partial_{i(p)} |_{[0,l(p)]}\}, & \text{若 } p \text{ 在某个 } \partial_{i(p)} \text{ 中.} \end{cases}$$

其中 $l(p) \geqslant 0$ 满足 $p = \partial_{i(p)}(l(p))$. 注意到 $\mathcal{R}_C$ 和 $\mathcal{R}_{C,p}$ 关于逐点收敛的拓扑是列紧的.

下面的引理很重要.

引理 3.4.3 设 $\sigma, \tau \in \mathcal{R}_C$ 是两条不同的曲线, $D(\sigma,\tau)$ 的定义与柱心 C 相关 (见 § 3.2), 并且不包含 $\mathcal{R}_C$ 中除 σ 和 τ 以外的曲线. 则存在 $D(\sigma,\tau)$ 中的序列 $\{p_i\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} d(p_i, C) = +\infty$, 并且两个曲线序列 $\sigma_i, \tau_i \in \mathcal{R}_{C,p_i}$ 分别收敛于 σ 和 τ.

证明 选取连接 σ 和 τ 的连续弧段 $c:[0,l]\to D(\sigma,\tau)$, 使得它在 $c(0)$ 和 $c(l)$ 点之外与 σ 和 τ 不相交. 令 $\varepsilon>0$ 是一个充分小的数. 首先我们来说明存在 $D(\sigma,\tau)$ 的端的连通邻域 $U_\varepsilon\subset D(\sigma,\tau)$, 使得对 $p\in U_\varepsilon$, $\mathcal{R}_{C,p}$ 中的任何曲线与 $c[\varepsilon,l-\varepsilon]$ 不相交. 实际上, 若不成立, 则存在序列 $p_i\in D(\sigma,\tau)$ 和 $\gamma_i\in\mathcal{R}_{C,p_i}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}d(p_i,C)=+\infty$, 且每个 γ_i 与 $c[\varepsilon,l-\varepsilon]$ 相交, γ_i 的一个极限与 $c[\varepsilon,l-\varepsilon]$ 相交, 并且是 $\mathcal{R}_C$ 的一个元素, 这与引理的假设矛盾. 因此证明了开始的论断.

现在令

$$E_\epsilon(\text{或 } F_\epsilon):=\{p\in U_\epsilon;\mathcal{R}_{C,p}\text{ 中的某条曲线与 } c[0,\epsilon]\ (\text{或 } c[l-\epsilon,l]\ )\text{ 相交}\},$$

则 $E_\varepsilon\bigcup F_\varepsilon=U_\varepsilon$. 由于与紧致集 A 相交的极小曲线的任何极限都是极小的且与 A 相交, 故 E_ε 和 F_ε 都是 U_ε 中的闭集. 因此由 U_ε 的连通性知 $E_\varepsilon\bigcap F_\varepsilon\neq\varnothing$.

设 $\varepsilon_i\to 0$ 是小正数的序列. 不失一般性, 我们假设 $d(C,U_{\varepsilon_i})\to\infty$. 对每个 i, 取非空交集 $E_{\varepsilon_i}\bigcap F_{\varepsilon_i}$ 中的点 p_i. 则对每个 i, 存在两个弧段 $\sigma_i,\tau_i\in\mathcal{R}_{C,p_i}$, 使得 σ_i 与 E_{ε_i} 相交, τ_i 与 F_{ε_i} 相交. 证毕.

设 $\sigma,\tau\in\mathcal{R}_C$, $p_i\in D(\sigma,\tau)$, $\sigma_i,\tau_i\in\mathcal{R}_{C,p_i}$ 如引理 3.4.3 的假设, 则 $\sigma_i\bigcup\tau_i$ 将 $D(\sigma,\tau)$ 划分为两个闭区域, 其中的一个是紧致子集, 记为 D_i, $\overline{\bigcup\limits_i D_i}=D(\sigma,\tau)$. 由引理 3.2.2(命题 3.2.3) 知:

推论 3.4.1 D_i 在 p_i 处的内角趋于 0. 曲线 σ 和 τ 在 $D(\sigma,\tau)$ 平行, 且 $\lambda_\infty(D(\sigma,\tau))=0$.

对 $x\in M(\infty)$, 记 σ_x 为从 C 到 x 的射线, 即 $d(\sigma_x(t),C)=t$, $\sigma_x(\infty)=x$. 由引理 3.4.1 可得 σ_x 的存在性. 如下定义 M 中的闭区域 D_x, 对每个 $x\in M(\infty)$, 若 $\overline{M\setminus C}$ 的分支 V 满足 $x\in V(\infty)$, $\lambda_\infty(V)=0$, 则 $D_x:=V$. 否则,

$$\begin{aligned}D_x:=\bigcup\{D(\sigma,\tau);\sigma,\tau\in\mathcal{R}_C\text{ 满足 }\sigma(\infty)=\tau(\infty)=x,\\ D(\sigma,\tau)\text{ 有定义且 }\lambda_\infty(D(\sigma,\tau))=0\}.\end{aligned}$$

由引理 3.4.2, 对任意 $x\in M(\infty)$, 存在 $\sigma_x^-,\sigma_x^+\in\mathcal{R}_C$, 使得相应于 x 的分支 V 满足 $\lambda_\infty(V)>0$ 时, $D_x=D(\sigma_x^-,\sigma_x^+)$.

引理 3.4.4 我们有

$$\bigcup_{x\in M(\infty)}D_x=\overline{M\setminus C}.$$

证明 设点 $p\in\overline{M\setminus C}$. 若 $\mathcal{R}_C$ 中的某条曲线穿过点 p, 则显然对某个 $x\in M(\infty)$, 有 $p\in D_x$. 假设 $\mathcal{R}_C$ 中没有曲线穿过 p, 则存在 $\sigma,\tau\in\mathcal{R}_C$, 使得 $p\in D(\sigma,\tau)\setminus(\sigma\bigcup\tau)$. 由 $\mathcal{R}_C$ 的列紧性, 可以选取 σ 和 τ, 使得 $D(\sigma,\tau)$ 关于包含

关系是极小的. 这样的 $D(\sigma,\tau)$ 符合引理 3.4.3 的假设, 于是 $\sigma(\infty)=\tau(\infty)=:x$. 因此得 $p\in D(\sigma,\tau)\subset D_x$. 证毕.

如下定义映射 $\Pi_C:\overline{M\setminus C}\longrightarrow M(\infty)$: 对任意 $p\in\overline{M\setminus C}$, 选取 $x\in M(\infty)$, 使得 $p\in D_x$, 记 $\Pi_C(p):=x$. 对于给定的点 $p\in M$, 使得满足 $p\in D_x$ 的点 $x\in M(\infty)$ 不是唯一的, 因为射线可以在 M 的边界点分支. 选取如 Π_C 定义的 x, 在以下的引理中考虑 x 的唯一性. 记 $\partial M(\infty):=\{\partial_1(\infty),\cdots,\partial_k(\infty)\}$, 其中 $\partial_1,\cdots,\partial_k$ 如引理 3.4.2 证明中的定义. 我们有:

引理 3.4.5　对于 $M(\infty)$ 中 $\partial M(\infty)$ 的任意邻域 U, 存在 M 的紧致子集 K_U, 它具有以下性质: 对每个点 $p\in M\setminus K_U$, 若 $x\in M(\infty)$ 满足 $p\in D_x$, 且 $x\in U$, 则 x 是唯一的.

证明　若以上结论不成立, 则存在从 C 出发的射线序列 $\{\sigma_i\}$, 使得 $\sigma_i\bigcap\partial M$ 非空, 当 $i\to\infty$ 时序列趋向于无穷, 并且 $\sigma_i(\infty)\notin U$. 用子列代替这个序列, 可设 σ_i 趋向于射线 σ. 则 σ 与 $\partial_1,\cdots,\partial_k$ 中的至少一个平行. 应用定理 3.3.2 得 $\sigma(\infty)\in\partial M(\infty)$. 但是另一方面, 由 $\sigma_i(\infty)\notin U$ 和引理 3.4.2 可知 $\sigma(\infty)\notin\operatorname{int}U$. 矛盾. 证毕.

定理 3.4.1　(1) 若 $\lambda_\infty(H)=0$, 则 $H(\infty)$ 只由一个点组成.

(2) 若 $\lambda_\infty(H)>0$, 则 $H(\infty)$ 同胚于非平凡的直线段.

证明　(1) 对任意曲线 $\alpha,\beta\in\mathcal{C}_H$, 满足 $\alpha\leqslant\beta$, 有

$$d_\infty(\alpha,\beta)=\lambda_\infty(D(\alpha,\beta))\leqslant\lambda_\infty(H)=0.$$

(2) 令点 $z,w\in H(\infty)$ 为任意固定的点使得 $\partial H(-\infty)<z<w<\partial H(+\infty)$, 其中 $\partial H(-\infty)$ 和 $\partial H(+\infty)$ 定义为 $\partial H(\infty)$ 中满足 $\partial H(-\infty)\leqslant\partial H(+\infty)$ 的点. 则只需证明所有满足 $x\in H(\infty)$, 且 $z\leqslant x\leqslant w$ 的 $[z,w]$ 同胚于 $[0,1]$. 对于 H 的柱心 C_H, 记 $D_{z,w}:=D(\sigma_z^-,\sigma_w^+)$, K_U 如引理 3.4.5 中的假设, 其中 $U:=H(\infty)\setminus[z,w]$. 选取连接 σ_z^+ 和 σ_w^- 的曲线 $c:[0,1]\longrightarrow D_{z,w}\setminus K_U$, 使得 $\Pi\circ c$ 在 $H(\infty)$ 的序关系 $\leqslant$ 下是单调不减的, 其中 $\Pi:=\Pi_{C_H}:\overline{H\setminus C_H}\longrightarrow M(\infty)$. 我们将构造同胚 $f:[0,1]\longrightarrow[z,w]$. 首先对 $k=0,1,\cdots$, 和 $j=0,1,2,3,\cdots,2^k$, 归纳地定义 $f(j/2^k)$. 令 $f(0):=z$, $f(1):=w$. 对整数 $k\geqslant 0$, 我们对所有 $j=0,1,2,3,\cdots,2^k$ 来定义 $f(j/2^k)$. 对所有 $j=0,1,2,3,\cdots,2^k-1$, 定义

$$f\left(\frac{2j+1}{2^{k+1}}\right):=\Pi\circ c\left(\frac{1}{2}\inf(\Pi\circ c)^{-1}f\left(\frac{j+1}{2^k}\right)-\frac{1}{2}\sup(\Pi\circ c)^{-1}f\left(\frac{j}{2^k}\right)\right).$$

由于 $\{f(j/2^k);k\geqslant 0,0\leqslant j\leqslant 2^k\}\subset[z,w]$ 是稠密的, 并且 f 保持序关系, 因此进行完备化以后可将 f 延拓为从 $[0,1]$ 到 $[z,w]$ 的同胚. 证毕.

设黎曼半柱面 N 在无穷处曲率存在, $pr: \tilde{N} \longrightarrow N$ 是 N 的万有覆盖, 且射线 σ 满足 $\sigma \bigcap \partial N = \{\sigma(0)\}$. 记 $H_n := D(\sigma^{-n}, \sigma^n)$, $n \in \mathbb{N}$. (见 §3.3)对任意的两个自然数 $m < n$, 有 $H_m \subset H_n$, 这诱导了自然嵌入 $H_m(\infty) \hookrightarrow H_n(\infty)$, 它保持了拓扑和 Tits 距离 d_∞. 因此 $\{H_n(\infty)\}$ 是一个归纳系. 记 $\tilde{N}(\infty)$ 为 $\{H_n(\infty)\}$ 的归纳极限, 且如下定义映射 $pr_\infty : \tilde{N}(\infty) \longrightarrow N(\infty)$. 对 $x \in \tilde{N}(\infty)$, 取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in H_n(\infty)$; 取 $\alpha \in \mathcal{C}_{H_n}$ 使得 $\alpha(\infty) = x$, 则 $pr_\infty(x) := (pr \circ \alpha)(\infty)$. 容易验证 pr_∞ 是开的, 连续的, 且为 d_∞- 不增的. 记 $\overline{\tilde{N}}^\infty := \tilde{N} \bigcup \tilde{N}(\infty)$, 可以得到自然投影 $\overline{pr}^\infty : \overline{\tilde{N}}^\infty \longrightarrow \overline{N}^\infty$, 其定义为

$$\overline{pr}^\infty(x) := \begin{cases} pr(x), & x \in \tilde{N}; \\ pr_\infty(x), & x \in \tilde{N}(\infty). \end{cases}$$

令 $G := \pi_1(N)(\approx \mathbb{Z})$. 存在 $g_0 \in G$, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $g_0 \circ \sigma^n = \sigma^{n+1}$. 则 G 只由 g_0 生成. 对于任意的 $g \in G$, 任意的 $\alpha(\infty) \in \tilde{N}(\infty)$, $\alpha \in \mathcal{C}_{\tilde{N}}$, G 在 $\tilde{N}(\infty)$ 上的作用定义为

$$g \cdot \alpha(\infty) := (g \circ \alpha)(\infty).$$

这个作用连续且 d_∞- 等距.

命题 3.4.1 若 $\tilde{N}(\infty)$ 包含两个不同的点, 则 $pr_\infty : \tilde{N}(\infty) \longrightarrow N(\infty)$ 是以 G 为变换群的覆叠映射, 且为 d_∞- 局部等距的.

证明 映射 $\varphi : N(\infty) \longrightarrow \tilde{N}(\infty)/G$, $\alpha(\infty) \mapsto \{\alpha^n(\infty)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是同胚, 且是一个 d_∞- 等距, 而 $\varphi \circ pr_\infty$ 即为投影 $\tilde{N}(\infty) \longrightarrow \tilde{N}(\infty)/G$. 更进一步, G 是定点自由的, 除非 $\tilde{N}(\infty)$ 由单个点组成. 证毕.

定理 3.4.2 (1) 若 $\lambda_\infty(N) = 0$, 则 $N(\infty)$ 和 $\tilde{N}(\infty)$ 均由单个点组成.

(2) 若 $\lambda_\infty(N) > 0$, 则 $\tilde{N}(\infty)$ 同胚于 $\mathbb{R}$, $N(\infty)$ 同胚于 S^1.

证明 (1) 假设 $\lambda_\infty(N) = 0$. 由引理 3.3.1 可知 $N(\infty)$ 由单个点组成. 由于黎曼半平面 $H_n \subset \tilde{N}$, $n \in \mathbb{N}$, 满足 $\lambda_\infty(H_n) = 2n\lambda_\infty(N) = 0$, 由定理 3.4.1 知每个 $H_n(\infty)$ 都由单个点组成, 同样 $\tilde{N}(\infty)$ 也由单个点组成.

(2) 假设 $\lambda_\infty(N) > 0$. 由定理 3.4.1 的 (2), 每个 $H_n(\infty)$ 同胚于非平凡直线段, $\tilde{N}(\infty)$ 同胚于 $\mathbb{R}$. 由命题 3.4.1 可得定理的结论. 证毕.

由于 $\overline{M \setminus C}$ 的每个连通分支是黎曼半平面或黎曼半柱面, 由定理 3.4.1 和定理 3.4.2 完全确定了 $M(\infty)$ 的拓扑结构, 于是得到以下定理:

定理 3.4.3 M 的紧化 $\overline{M}^\infty$ 是 2 维紧致带边的拓扑流形.

§5　Tits 度量 d_∞ 的结构

我们考虑在无穷处具有曲率的黎曼半平面 H.

引理 3.5.1　设 C_H 是 H 的柱心, 假设从 C_H 出发的射线序列 $\{\sigma_i\}$ 收敛于射线 σ, 并且 $\sup\limits_{i,j} d_\infty(\sigma_i,\sigma_j)<+\infty$. 则有

$$\lim_{i\to\infty} d_\infty(\sigma_i,\sigma)=0.$$

证明　不失一般性, 假设 $H':=D(\sigma_1,\sigma)$ 完全包含每一条 σ_i. 则对每个 i 和 H' 的任意紧致子集 K,

$$\begin{aligned}d_\infty(\sigma_1,\sigma_i)=\pi&-\lambda(\partial D(\sigma_1,\sigma_i)\bigcap K)-c(D(\sigma_1,\sigma_i)\bigcap K)\\&-\lambda(\partial D(\sigma_1,\sigma_i)\setminus K)-c(D(\sigma_1,\sigma_i)\setminus K).\end{aligned}$$

这里, 我们有

$$\begin{gathered}-\lambda_-(\partial H'\setminus K)\leqslant\lambda(\partial D(\sigma_1,\sigma_i)-k)\leqslant\lambda_+(\partial H'\setminus K),\\-\int_{H'\setminus K}G_-\mathrm{d}H\leqslant c(D(\sigma_1,\sigma_i)\setminus K)\leqslant\int_{H'\setminus K}G_+\mathrm{d}H,\\\lim_{i\to\infty}\lambda(\partial D(\sigma_1,\sigma_i)\bigcap K)=\lambda(\partial H'\bigcap K),\\\lim_{i\to\infty}c(D(\sigma_1,\sigma_i)\bigcap K)=c(H'\bigcap K).\end{gathered}$$

因此

$$\begin{aligned}&\pi-\lambda(\partial D(\sigma_1,\sigma)\bigcap K)-c(D(\sigma_1,\sigma)\bigcap K)\\&-\lambda_+(\partial H'\setminus K)-\int_{H'\setminus K}G_+\mathrm{d}H\\\leqslant&\liminf_{i\to\infty}d_\infty(\sigma_1,\sigma_i)\leqslant\limsup_{i\to\infty}d_\infty(\sigma_1,\sigma_i)\\\leqslant&\pi-\lambda(\partial D(\sigma_1,\sigma)\bigcap K)-c(D(\sigma_1,\sigma)\bigcap K)\\&+\lambda_-(\partial H'\setminus K)+\int_{H'\setminus K}G_-\mathrm{d}H.\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

当 K 趋向于 H' 时, (3.5.1) 中的第一个公式收敛于 $d_\infty(\sigma_1,\sigma)$, 于是

$$d_\infty(\sigma_1,\sigma)\leqslant\liminf_{i\to\infty}d_\infty(\sigma_1,\sigma_i),$$

这在以上假设下是有限的. 这个关系说明 $\lambda_-(\partial H')+\int_{H'}G_-\mathrm{d}H$ 是有限的, 因此当 K 趋向于 H' 时, (3.5.1) 的最后一个公式也收敛于 $d_\infty(\sigma_1,\sigma)$. 证毕.

命题 3.5.1 度量空间 $(H(\infty), d_\infty)$ 是完备的.

证明 设 $\{x_i\}$ 是 $H(\infty)$ 中关于 d_∞ 的 Cauchy 序列. 选取从 C_H 到 x_i 的射线 σ_{x_i}, 则存在 $\{\sigma_{x_i}\}$ 的子列 $\{\sigma_{x_{j(i)}}\}$ 收敛于从 C_H 出发的射线 σ. 应用引理 3.5.1 可知, 当 $i \to \infty$ 时, $d_\infty(x_{j(i)}, \sigma(\infty))$ 趋向于 0. 这说明 $d_\infty(x_i, \sigma(\infty))$ 也趋向于 0. 证毕.

定理 3.5.1 (1) 若 $\lambda_\infty(H) < +\infty$, 则 $(H(\infty), d_\infty)$ 等距于长度为 $\lambda_\infty(H)$ 的紧致直线段.

(2) 若 $\lambda_\infty(H) = +\infty$, 则 $(H(\infty), d_\infty)$ 的每个连通分支等距于 $\mathbb{R}$ 的一个闭区间, 并且 $(H(\infty), d_\infty)$ 的 1 维 Hausdorff 测度为

$$\mathcal{H}^1(H(\infty), d_\infty) = +\infty.$$

证明 对任意 $x \in H(\infty)$, 定义映射

$$\iota_x : I_x := \{y \in H(\infty); d_\infty(x, y) < +\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

为, 对任意 $y \in H(\infty)$,

$$\iota_x(y) := \begin{cases} d_\infty(x, y), & x \leqslant y; \\ -d_\infty(x, y), & x \geqslant y. \end{cases}$$

显然这是一个等距映射, 且保持序关系. 由于 d_∞ 是完备的, 因此对任意 $x \in H(\infty)$, 像 $\iota_x(I_x)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集.

我们证明对任意 $x \in H(\infty)$, (I_x, d_∞) 是连通的. 实际上, 若 (I_x, d_∞) 对某个 $x \in H(\infty)$ 不连通, 则存在 $\mathbb{R}$ 的非空区间 (a, b), 使得 $\iota_x(I_x) \bigcap (a, b) = \varnothing, a, b \in \iota_x(I_x)$. 因此 $\iota_x^{-1}(a) < \iota_x^{-1}(b)$, 且 $(\iota_x^{-1}(a), \iota_x^{-1}(b)) = \varnothing$, 这与 $H(\infty)$ 同胚于 $\mathbb{R}$ 的一个紧致区间矛盾 (见定理 3.4.1).

因此对任意 $x \in H(\infty)$, $\iota_x(I_x)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭区间. 这证明了 (1) 以及 (2) 的前一部分.

以下我们将证明若 $\lambda_\infty(H) = +\infty$, 则 $\mathcal{H}^1(H(\infty), d_\infty) = +\infty$. 假设 $\lambda_\infty(H) = +\infty$, 且 $\mathcal{H}^1(H(\infty), d_\infty) < +\infty$. 注意到 $(H(\infty), d_\infty)$ 的连通分支族恰好等于 $\{I_x; x \in H(\infty)\}$. 由 $\mathcal{H}^1(H(\infty), d_\infty) < +\infty$, 可知 $(H(\infty), d_\infty)$ 的每个连通分支等距于紧致直线段. 由 $H(\infty)$ 及其标准拓扑同胚于 $[0, 1]$ 可知, 对 $(H(\infty), d_\infty)$ 的任意两个分支 $[x_1, y_1]$ 和 $[x_2, y_2]$, 存在点 $z \in H(\infty)$, 使得 $y_1 < z < x_2$, 其中 $y_1 < x_2$. 因此 $(H(\infty), d_\infty)$ 的分支集合的基数不小于 $2^{\aleph_0}$, 这与 $\mathcal{H}^1(H(\infty), d_\infty) < +\infty$ 矛盾. 证毕.

对于在无穷处容许曲率的黎曼半柱面 N, 我们有:

定理 3.5.2 (1) 若 $0 < \lambda_\infty(N) < +\infty$, 则 $(\tilde{N}(\infty), d_\infty)$ 等距于 $\mathbb{R}$, 且 $(N(\infty), d_\infty)$ 等距于长度为 $\lambda_\infty(N)$ 的圆.

(2) 若 $\lambda_\infty(N) = +\infty$, 则 $(N(\infty), d_\infty)$ 的每个连通分支是一条闭线段, 并且

$$\mathcal{H}^1(N(\infty), d_\infty) = +\infty.$$

证明 (1) 假设 $0 < \lambda_\infty(N) < +\infty$. 在 §3.4 中定义了黎曼半平面 $H_n = D(\sigma^{-n}, \sigma^n) \subset \tilde{N}$, $n \in \mathbb{N}$. 我们有 $\lambda_\infty(H_n) = 2n\lambda_\infty(N) < +\infty$, 则由定理 3.5.1 可知, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $(H_n(\infty), d_\infty)$ 等距于长度为 $2n\lambda_\infty(H)$ 的紧致线段. 因此 $(\tilde{H}(\infty), d_\infty)$ 等距于 $\mathbb{R}$, 并且 $(N(\infty), d_\infty)$ 等距于长度为 $\lambda_\infty(N)$ 的圆 (见命题 3.4.1).

(2) 因为 $\lambda_\infty(N) = \lambda_\infty(D(\sigma^0, \sigma^1))$, 并且 $D(\sigma^0, \sigma^1)(\infty) \setminus \{\sigma^1(\infty)\}$ 是覆盖映射 $pr_\infty : \tilde{N}(\infty) \longrightarrow N(\infty)$ 的基本域, 对 $H := D(\sigma^0, \sigma^1)$ 应用定理 3.5.1 可得结论. 证毕.

结合定理 3.5.1 和定理 3.5.2 可得:

定理 3.5.3 $(M(\infty), d_\infty)$ 的每个连通分支是可以带边的完备 1 维黎曼流形, 除非它由单独一个点组成. 此外

$$\mathcal{H}^1(M(\infty), d_\infty) = \lambda_\infty(M).$$

一般地, $M(\infty)$ 的拓扑不与 Tits 距离 d_∞ 相容, 以下举例说明.

例 3.5.1 (1) 设 M 是双曲平面 $H^2(-1)$, 则一方面对任意不同的 $x, y \in M(\infty)$, 有 $d_\infty(x, y) = +\infty$; 另一方面 $M(\infty)$ 同胚于 S^1.

(2) 设 M 是非正弯曲的黎曼柱面, 它包含一条简单闭测地线将 M 分为两个黎曼半柱面 N_1 和 N_2, 使得在某个紧致子集外 N_1 的曲率 $\leqslant -1$, N_2 等距于 $S^1 \times [0, +\infty)$. 则 M 的万有覆盖 $\tilde{M}$ 是具有非正曲率的黎曼平面, 并且它的理想边界 $\widetilde{M}(\infty)$ 等距于区间 $[0, \pi]$ 和一个离散闭联集的不交并.

注 3.5.1 若 M 是一个 2 维 Hadamard 流形, 即是一个具有非正曲率的黎曼平面, 则 M 的理想边界 $M(\infty)$ 在这里定义的拓扑等价于 [7] 中定义的球面拓扑, 并且这里定义的 Tits 度量等价于 [7] 中的定义.

引理 3.5.2 $H(\infty)$ 的标准拓扑强于 Tits 距离函数 d_∞ 诱导的拓扑.

证明 假设存在点 $x \in H(\infty)$ 和 $H(\infty)$ 中的点列 $\{x_i\}$, 使得当 $i \to \infty$ 时 $d_\infty(x_i, x)$ 趋向于 0, 但 x_i 不趋向于 x. 可以找到从 C_H 到 x_i 的射线 σ_{x_i}, 并且假设取子列后, 当 $i \to \infty$ 时, σ_{x_i} 趋向于射线 σ. 引理 3.5.1 证明了 $d_\infty(x_i, \sigma(\infty))$

趋向于 0, 这表明

$$d_\infty(x,\sigma(\infty)) \leqslant \limsup_{i\to\infty}(d_\infty(x,x_i)+d_\infty(x_i,\sigma(\infty))=0,$$

即 $x=\sigma(\infty)$. 然而引理 3.4.2 证明了 x_i 趋向于 $\sigma(\infty)$. 矛盾. 证毕.

容易将引理 3.5.2 推广为以下的定理. 证明部分省略.

定理 3.5.4 $M(\infty)$ 的标准拓扑强于 Tits 距离函数 d_∞ 诱导的拓扑.

接下来我们将给出 $\overline{M}^\infty$ 上的 Gauss-Bonnet 定理. 尽管 $\mathbb{R}^3$ 中凸体的 (非光滑) 边界上的 Gauss 曲率一般没有定义, 但却给出了曲率测度的定义. 它是 Gauss 映射像的面积的积分, 这里 Gauss 映射是到 $S^2(1)$ 上的多值映射. 类似地, 集函数 $\lambda_\pm(\cdot)$ 可以延拓为分段光滑边界 ∂M 上的测度. 因此, 一方面很自然地称 $\lambda(\cdot)=\lambda_+(\cdot)-\lambda_-(\cdot)$ 为 ∂M 上的 (测地) 曲率测度. 另一方面, 我们可以自然地如下定义 $M(\infty)$ 上的曲率测度. $M(\infty)\setminus\partial M(\infty)$ 上的 (测地) 曲率测度 λ 定义为 $(M(\infty),d_\infty)$ 上的 1 维 Hausdorff 测度. 若对给定的 M 的柱心 C, V 是 $\overline{M\setminus C}$ 的任意分支, 则有 $\lambda(V(\infty)\setminus\partial M(\infty))=\lambda_\infty(V)$. 设 $x\in\partial M(\infty)\bigcap V(\infty)$, 当 $\lambda_\infty(V)>0$ 时, 考虑内角为 $\pi/2$ 的 x, 并定义 $\lambda(\{x\}):=\pi/2$. 当 $\lambda_\infty(V)=0$ 并且 V 为黎曼半平面时, 考虑内角为零的 x, 并定义 $\lambda(\{x\}):=2\pi$. 这定义了 $\partial\overline{M}^\infty$ 的 (测地) 曲率测度, 满足

$$\lambda(\partial\overline{M}^\infty)=\lambda(\partial M)+\lambda_\infty(M)+\sum_i(\pi-\theta_i),$$

其中 θ_i 是 $\overline{M}^\infty$ 在 $\partial M(\infty)$ 的内角.

考虑在 $M(\infty)$ 中 $\overline{M}^\infty$ 的任何内点具有全 (Gauss) 曲率 2π, 则

$$c(\overline{M}^\infty)=c(M)+2\pi\cdot\sharp\{x\in M(\infty);x\ \text{是}\overline{M}^\infty\ \text{的内点}\}.$$

于是有:

定理 3.5.5 ($\overline{M}^\infty$ 的 Gauss-Bonnet 定理)

$$c(\overline{M}^\infty)+\lambda(\overline{M}^\infty)=2\pi\chi(\overline{M}^\infty).$$

练习 3.5.1 证明定理 3.5.5.

§6 三角比较定理

在这一节中, 我们将研究 M 中几乎平坦三角形的角和边的长度的关系; 这个关系几乎等价于欧氏空间中的关系 (见以下的定理 3.6.1) . 定理 3.6.1 的更加

详细的讨论参见 [98]. 本节的结论将在本章最后一节中用来证明, 若 M 在度量经数乘之后收缩, 则它收敛于具有 Tits 度量的理想边界上的锥 (见定理 3.7.2).

标记 3.6.1 令 $\omega : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ 表示某个函数, 满足

$$\lim_{\epsilon_1 \to 0} \cdots \lim_{\epsilon_k \to 0} \omega(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) = 0,$$

且如 Landau 记号一样运用 ω; 例如, 我们有

(1) $\lim\limits_{\epsilon_k \to 0} \omega(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{k-1}) = \omega(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{k-1})$.

(2) $\omega(\epsilon) f = \omega(\epsilon)$, 若$f$ 是有界函数.

(3) $\sin(\theta + \omega(\epsilon)) = \sin\theta + \omega(\epsilon)$.

(4) $\cos(\theta + \omega(\epsilon)) = \cos\theta + \omega(\epsilon)$.

(5) $\omega(\epsilon) f + \omega(\epsilon) g = \omega(\epsilon)(| f | + | g |)$.

(1) $\sim$ (5) 的左边化简为右边.

设 $\triangle ABC$ 是 M 中以 $A, B, C \in M$ 为顶点的三角形, 边 α, β, γ 分别是 M 中连接 B 和 C, C 和 A, A 和 B 的极小线段. 由于 M 可能具有非空边界, 故 α, β, γ 不一定是测地线. 假设 α, β, γ 围成了 M 中的可缩区域, 仍记为 $\triangle ABC$. 记 $a := d(B, C) = L(\alpha)$, $b := d(C, A) = L(\beta)$, $c := d(A, B) = L(\gamma)$, 并记 $\angle A$ 为 $\triangle ABC$ 在 A 处的内角 (类似地有 $\angle B$, $\angle C$) . $\epsilon \geqslant 0$, 这样的 $\triangle ABC$ 称为 ϵ- 几乎平坦的, 若满足条件

$$\int_{\triangle ABC} | G | \, \mathrm{d}M + \lambda_{\mathrm{abs}}(\alpha) + \lambda_{\mathrm{abs}}(\beta) + \lambda_{\mathrm{abs}}(\gamma) \leqslant \epsilon. \tag{AF}$$

注意 0-几乎平坦三角形是欧氏的. 在条件 (AF) 下, 由 $\triangle ABC$ 的 Gauss-Bonnet 定理可得

$$| \angle A + \angle B + \angle C - \pi | \leqslant \epsilon,$$

并且, 尽管 α, β, γ 可能在边界上有折点, 对任意的 $t \in (0, a)$ 我们仍有

$$\angle(\dot\alpha(t-0), \dot\alpha(t+0)) \leqslant \epsilon,$$

对 β 和 γ 也有相同的不等式成立.

现在假设 ϵ- 几乎平坦的 $\triangle ABC$ 满足 $\angle A \leqslant \pi$, $\angle B \leqslant \pi/2$. 对 $t \in [0, c]$, 设 σ_t 是 $\triangle ABC$ 中从 $\gamma(c-t)$ 到 α 的极小线段, 记 $h(t) := L(\sigma_t)$; 见图 3.6.1. 设 θ_t 为区域 D_t 在 $\gamma(c-t)$ 处的内角, 区域 D_t 由 $\gamma\,|_{[c-t,c]}$, σ_t 和从 B 到 $\sigma_t(h(t))$ 的 α 的子弧段围成, 并且记 $\varphi(t)$ 为 D_t 在 $\sigma_t(h(t))$ 处的内角. 区域 D_t 对 t 是单调递增的. 由第一变分公式, 若 $\sigma_t(h(t))$ 是 α 的一个非折点的内点, 则 $\varphi(t) = \pi/2$. 存在 $t_0 \in [0, c]$, 使得

$$\sigma_t(h(t)) \begin{cases} \neq C, & t \in [0, t_0); \\ = C, & t \in (t_0, c]. \end{cases}$$

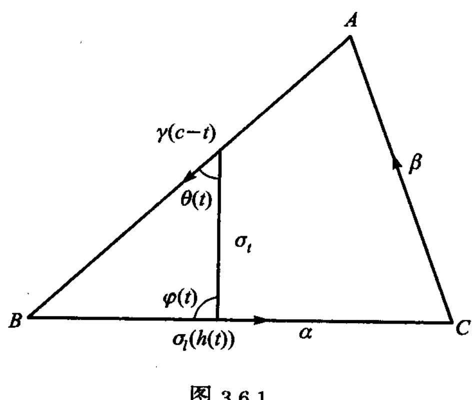


图 3.6.1

特别地,

$$\varphi(t)\begin{cases}=\pi/2+\omega(\epsilon), & t\in[0,t_0);\\ \geqslant\pi/2, & t\in(t_0,c].\end{cases}$$

记 $\sigma_t^- := \lim\limits_{s\nearrow t}\sigma_s$, $\sigma_t^+ := \lim\limits_{s\searrow t}\sigma_s$, 则有

$$\angle(\dot\sigma_{t_0}^-(h(t_0)),\dot\alpha)=\pi/2+\omega(\epsilon),\quad \sigma_{t_0}^+(h(t_0))=C.$$

引理 3.6.1 对任意 $t\in[0,t_0]$, 有

$$h(t)=t\sin(\angle B+\omega(\epsilon)).$$

进一步, 若 $\angle C\leqslant\pi/2+\omega(\epsilon)$, 则

$$h(c)=c\sin(\angle B+\omega(\epsilon)).$$

证明 由 Gauss-Bonnet 定理和条件 (AF) 可知, 对任意 $t\in[0,c]$,

$$|\angle B+\theta(t)+\varphi(t)-\pi|\leqslant\omega(\epsilon).$$

对任意 $t\in[0,t_0)$, $\varphi(t)=\pi/2+\omega(\epsilon)$, 因此

$$\theta(t)=\pi/2-\angle B+\omega(\epsilon).$$

由第一变分公式得, 对任意 $t\in[0,t_0]$ 有

$$h(t)=\int_0^t\cos\theta(t)\mathrm{d}t=t\sin(\angle B+\omega(\epsilon)).$$

若 $\angle C\leqslant\pi/2+\omega(\epsilon)$, 则对任意 $t\in[0,c]$, 有 $\varphi(t)=\pi/2+\omega(\epsilon)$, 从而

$$h(c)=c\sin(\angle B+\omega(\epsilon)).$$

证毕.

引理 3.6.2 若 ϵ-几乎平坦 $\triangle ABC$ 满足

$$\angle B, \angle C \geqslant \pi/2,$$

则

$$a \leqslant (b+c)\omega(\epsilon).$$

证明 设 σ_t (τ_t) 是 $\triangle ABC$ 中从 $\gamma(t)$ 到 β $(\beta(c-t)$ 到 $\gamma)$ 的极小线段, 并且如上定义的 t_0 (t_1) 与 σ_t (τ_t) 相对应; 见图 3.6.2. 若 $t_0 < c$ 且 $t_1 < b$, 则由于 $\sigma_{t_0}^+$ 与 $\tau_{t_1}^+$ 相交, 由三角不等式得

$$a \leqslant L(\sigma_{t_0}) + L(\tau_{t_0}).$$

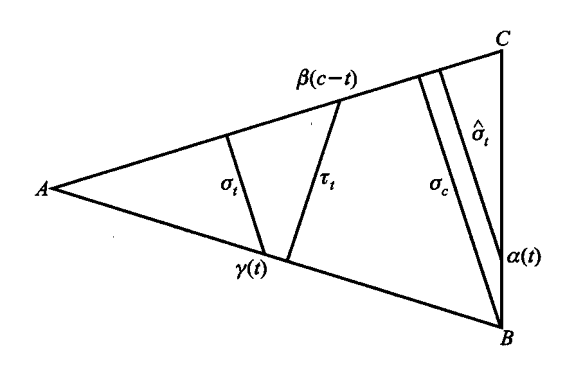


图 3.6.2

因为 $\angle A = \omega(\epsilon)$, 应用引理 3.6.1 得

$$L(\sigma_{t_0}) = t_0\omega(\epsilon) \leqslant b\omega(\epsilon), \quad L(\tau_{t_1}) \leqslant c\omega(\epsilon).$$

由此得到这一情形下的结论.

若 $t_0 = c$ 和 $t_1 = b$ 至少有一个成立, 不失一般性可假设 $t_0 = c$. 则由于 $\angle A = \omega(\epsilon)$, 应用引理 3.6.1 得

$$d_{\triangle ABC}(B, \beta) \leqslant c\omega(\epsilon). \tag{3.6.1}$$

若 $d_{\triangle ABC}(B,\beta) = a$, 这与 (3.6.1) 一起可得到引理的结论. 现假设 $d_{\triangle ABC}(B,\beta) < a$. 因为 $\angle(\dot{\sigma}_c(L(\sigma_c)), \dot{\beta}) = \pi/2 + \omega(\epsilon)$, 由条件 (AF) 可知 $\angle(\dot{\sigma}_c(0), \dot{\alpha}(0)) \leqslant \omega(\epsilon)$. 对 $t \in [0, a]$, 设 $\hat{\sigma}_t$ 是 $\triangle ABC$ 中从 $\alpha(t)$ 到 β 的极小线段. 对任意 $t \in [0, a - d_{\triangle ABC}(B,\beta))$, 由三角不等式可知 $\hat{\sigma}_t(L(\hat{\sigma}_t)) \neq C$, 因此 $\angle(\dot{\hat{\sigma}}_t(L(\hat{\sigma}_t)), \dot{\beta}) = \pi/2 + \omega(\epsilon)$, 这与 $\angle C \geqslant \pi/2$ 和 (AF) 得出

$$\angle(-\dot{\alpha}(t), \dot{\hat{\sigma}}_t(0)) = \pi + \omega(\epsilon).$$

利用与引理 3.6.1 相似的讨论可得, 对任意 $t \in [0, a - d_{\triangle ABC}(B, \beta))$,

$$0 \leqslant L(\hat{\sigma}_t) \leqslant d_{\triangle ABC}(B, \beta) - (1 - \omega(\epsilon))t.$$

因此

$$t \leqslant (1 + \omega(\epsilon))d_{\triangle ABC}(B, \beta).$$

特别地, 当 $t := a - d_{\triangle ABC}(B, \beta)$ 时, 有

$$a \leqslant (2 + \omega(\epsilon))d_{\triangle ABC}(B, \beta),$$

这与 (3.6.1) 式一起得到引理的结论. 证毕.

引理 3.6.3 若 ϵ-几乎平坦 $\triangle ABC$ 满足 $\angle C = \pi/2 + \omega(\epsilon)$, 则

(1) $\dfrac{b}{c} = \cos\angle A + \omega(\epsilon) = \sin\angle B + \omega(\epsilon)$.

(2) $\dfrac{a}{c} = \cos\angle B + \omega(\epsilon) = \sin\angle A + \omega(\epsilon)$.

(3) $\dfrac{a^2 + b^2}{c^2} = 1 + \omega(\epsilon)$.

证明 选取 $\triangle ABC$ 中 A 从到 α 的极小线段 σ, 记 $h := L(\sigma) = d_{\triangle ABC}(A, \alpha)$. 由引理 3.6.1 知

$$\frac{h}{c} = \sin\angle B + \omega(\epsilon). \tag{3.6.2}$$

因为由 σ, β 以及 α 的从 $\sigma(h)$ 到 C 的子弧段围成的区域在 $\sigma(h)$ 处的内角等于 $\pi/2 + \omega(\epsilon)$, 应用引理 3.6.2 得

$$d(\sigma(h), C) \leqslant (h + b)\omega(\epsilon);$$

上式结合三角不等式可以得到

$$\frac{b}{h} = 1 + \omega(\epsilon).$$

结合上式与 (3.6.2) 式可得

$$\frac{b}{c} = (1 + \omega(\epsilon))(\sin\angle B + \omega(\epsilon)) = \sin\angle B + \omega(\epsilon) = \cos\angle A + \omega(\epsilon),$$

其中最后一个等号由 $\angle A + \angle B = \pi/2 + \omega(\epsilon)$ 得到. 这就证明了 (1).

用类似的方法可以证明 (2), 由 (1) 和 (2) 可以证明 (3). 证毕.

定理 3.6.1 (余弦定理) 任意 ϵ-几乎平坦 $\triangle ABC$ 满足

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A + (a + b + c)^2\omega(\epsilon).$$

证明　首先考虑 $\angle A \geqslant \pi/2$ 的情形. 则有 $\angle B, \angle C \leqslant \pi/2+\epsilon$. 取 $\triangle ABC$ 中从 A 到 α 的极小线段 σ, 将 $\triangle ABC$ 分割为两个三角形; 见图 3.6.3. 记 $h := L(\sigma) = d_{\triangle ABC}(A, \alpha)$, $a_1 := d(B, \sigma(h))$, $a_2 := d(C, \sigma(h))$; 并记 θ_1(或 θ_2) 为 σ 和 γ(或 σ 和 β) 在 A 处所夹的角. 由于 $\angle A = \theta_1 + \theta_2$, 对每个三角形应用引理 3.6.3, 可知, 一方面

$$\begin{aligned}\cos\angle A &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\ &= \left(\frac{h}{b}+\omega(\epsilon)\right)\left(\frac{h}{c}+\omega(\epsilon)\right) - \left(\frac{a_1}{b}+\omega(\epsilon)\right)\left(\frac{a_2}{c}+\omega(\epsilon)\right)\\ &= \frac{h^2-a_1a_2}{bc} + \frac{bc+bh+ch+a_1c+a_2b}{bc}\omega(\epsilon).\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

另一方面, 由引理 3.6.3 中 (3) 得

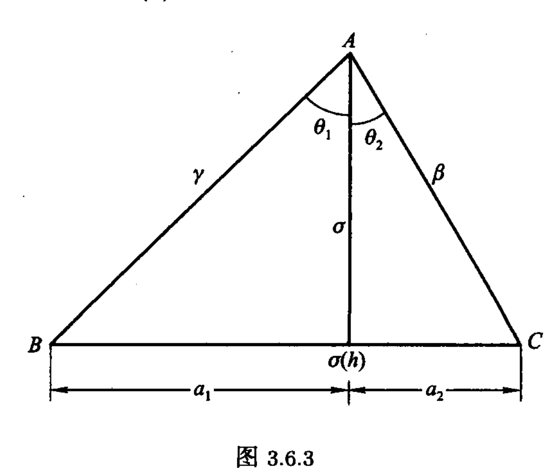


图 3.6.3

$$b^2 = (1+\omega(\epsilon))(a_1^2+h^2),\quad c^2 = (1+\omega(\epsilon))(a_2^2+h^2),$$

这结合 $a = a_1 + a_2$ 可得

$$b^2+c^2-a^2 = 2(h^2-a_1a_2) + (a_1^2+a_2^2+h^2)\omega(\epsilon).$$

结合上式与 (3.6.3) 式可得

$$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{bc+bh+ch+a_1c+a_2b+a_1^2+a_2^2+h^2}{bc}\omega(\epsilon).$$

这里由于 $h \leqslant a+b$, 且 $a_1, a_2 \leqslant a$, 因此因子

$$(bc+bh+ch+a_1c+a_2b+a_1^2+a_2^2+h^2)\omega(\epsilon)$$

化简为 $(a+b+c)^2\omega(\epsilon)$. 这便证明了这种情形下的结论.

接下来考虑 $\angle A < \pi/2$ 的情形, 则 $\min\{\angle B, \angle C\} < \pi/2 + \epsilon$. 不失一般性, 假设 $\angle B < \pi/2 + \epsilon$. 利用与第一种情形相同的方法, 选取 $\triangle ABC$ 中从 C 到 γ 的极小线段 σ, 使得它的长度为 $h := d_{\triangle ABC}(C, \gamma)$, 并且将 $\triangle ABC$ 分割为两个三角形. 对这些三角形中的每一个应用引理 3.6.3 可得

$$h = b\sin\angle A + b\omega(\epsilon) = a\sin\angle B + a\omega(\epsilon),$$

因此

$$a^2\sin^2\angle B = b^2\sin^2\angle A + (a+b)^2\omega(\epsilon). \tag{3.6.4}$$

然而由引理 3.6.3 得

$$d(A, \sigma(h)) = b(\cos\angle A + \omega(\epsilon)), \quad d(B, \sigma(h)) = a(\cos\angle B + \omega(\epsilon));$$

这些结合 $c = d(A, \sigma(h)) + d(B, \sigma(h))$ 可得

$$a^2\cos^2\angle B = c^2 + b^2\cos^2\angle A - 2bc\cos\angle A + (a+b+c)^2\omega(\epsilon).$$

结合上式与 (3.6.4) 式便完成了定理的证明. 证毕.

§7 极限锥的收敛性

定义 3.7.1 (Gromov-Hausdorff 收敛) 设 X 和 Y 是两个度量空间, 映射 $f : X \longrightarrow Y$ (不必是连续的) 称为 ϵ- 逼近, 如果以下的 (1) 和 (2) 成立:

(1) $|\, d(p,q) - d(f(p), f(q)) \,| < \epsilon, \quad \forall p, q \in X$.

(2) $B(f(X), \epsilon) = Y$.

称紧致度量空间序列 $\{X_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛于度量空间 X_∞, 如果存在 ϵ_i- 逼近序列 $f_i : X_i \longrightarrow X_\infty$, $i = 1, 2, \cdots$, 且使得 $\epsilon_i \to 0$. 这一收敛的概念称为 Gromov-Hausdorff 收敛, 它在紧致度量空间的集合上诱导了一个拓扑, 称为 Gromov-Hausdorff 拓扑. (为了定义拓扑, 我们需要的是一个有向集的网, 而不是一个序列.)

我们还需要定义带基点的非紧空间上的 Gromov-Hausdorff 收敛. 设 (X_∞, x_∞) 是一个带基点的度量空间, $\{(X_i, x_i)\}_{i=1,2,\cdots}$ 是带基点的度量空间序列, 使得 X_i 的所有有界闭子集和 X_∞ 都是紧致的. 称序列 $\{(X_i, x_i)\}_{i=1,2,\cdots}$ 收敛于 (X_∞, x_∞), 若对任意 $r > 0$, 存在一个序列 $r_i \searrow r$ 和 ϵ_i- 逼近 $f_{r,i} := \overline{B(x_i, r_i)} \longrightarrow \overline{B(x_\infty, r)}$, $i = 1, 2, \cdots$, 使得 $\epsilon_i \to 0$, 且对每个 i, $f_{r,i}(x_i) = x_\infty$. 这一收敛的概念称为带基点的 Gromov-Hausdorff 收敛.

定义 3.7.2 (欧氏锥) 度量空间 X 上的欧氏锥 "cone X" 定义为具有度量 ρ 的商空间 $X \times [0,+\infty)/X \times \{0\}$, 其中度量 ρ 定义为, 对任意的 $(p,a),(q,b) \in$ cone $X(p,q \in X,\ a,b \geqslant 0)$,

$$\rho((p,a),(q,b)) := \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\min\{d(p,q),\pi\}}.$$

记 o 为 cone X 中与 $X \times \{0\}$ 对应的点, 称之为 cone X 的顶点.

本节的目的是证明若 $\lambda_\infty(M) < +\infty$, 则当 $r \to +\infty$ 时, 带基点的空间 $((1/r)M,p)$ 在带基点的 Gromov-Hausdorff 收敛的意义下趋向于 (cone $M(\infty),o)$ (定理 3.7.2) . 其中 $p \in M$ 是任意固定点, $(1/r)M$ 由空间 M 的度量乘以因子 $1/r$ 后得到.

假设 $\lambda_\infty(M) < +\infty$, 固定 $0 < \epsilon \ll 1$, 则存在 M 的柱心 C_ϵ, 使得 $\overline{\partial M \setminus C_\epsilon}$ 的分支的每条曲线都与 C_ϵ 的拓扑边界垂直相交, 并且

$$\int_{M\setminus C_\epsilon} |\,G\,|\,\mathrm{d}M + \lambda_{\mathrm{abs}}(\partial M \setminus C_\epsilon) \leqslant \epsilon.$$

注意任何包含于 $M \setminus C_\epsilon$ 的 $\triangle ABC$ 都是 ϵ-几乎平坦的.

引理 3.7.1 若 $c:[0,+\infty) \longrightarrow \partial M$ 是 $\overline{\partial M \setminus C_\epsilon}$ 的分支, 则

$$d(c(0),c(t)) \geqslant t\cos\epsilon.$$

证明 设 D_t 是由 $c\,|_{[0,t]}$ 和 $\overline{M \setminus C_\epsilon}$ 中从 $c(0)$ 到 $c(t)$ 的极小线段 σ_t 围成的区域. 记 $\theta(t) := \angle_{c(t)}D_t$, $\varphi(t) := \angle_{c(0)}D_t$; 见图 3.7.1. 则由 Gauss-Bonnet 定理得, 任给 $t \geqslant 0$, 对于 δ_t 和 c 的适当的边,

$$c(D_t) = \theta(t) + \varphi(t) - \lambda(c\,|_{[0,t]}) - \lambda(\sigma_t).$$

这里, 由 C_ϵ 的假设知

$$c(D_t) + \lambda(c\,|_{[0,t]} \setminus \sigma_t) \leqslant \epsilon,$$

并且由 σ_t 的极小性可得

$$\lambda(\sigma_t) = \lambda(\sigma_t \bigcap \partial C_\epsilon) \leqslant 0.$$

因此对任意 $t \geqslant 0$, 有 $\theta(t) \leqslant \epsilon$, 这结合第一变分公式便得引理的结论. 证毕.

引理 3.7.2 存在 $T = T(\epsilon, L(\partial C_\epsilon)) > 0$, 使得若对曲线 $\sigma,\tau \in \mathcal{R}_{C_\epsilon}$, $D(\sigma,\tau)$ 有定义, 并且 $\lambda_\infty(D(\sigma,\tau)) < \pi - 5\epsilon$, 则 $D(\sigma,\tau)$ 中连接 $\sigma(T)$ 与 $\tau(T)$ 的极小线段 γ_T 不与 ∂C_ϵ 相交.

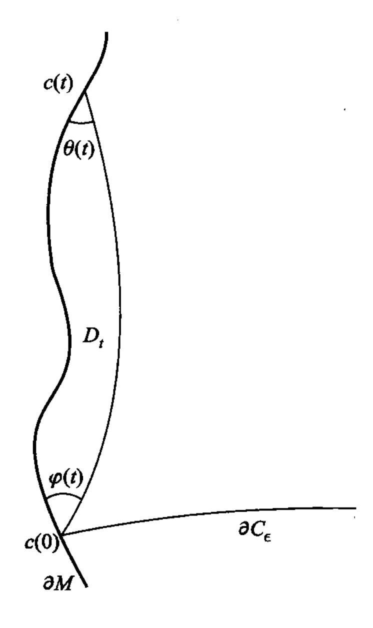


图 3.7.1

证明 记

$$T := \frac{L(\partial C_\epsilon)}{\cos\epsilon - \cos 2\epsilon}.$$

假设 $\sigma, \tau \in \mathcal{R}_{C_\epsilon}$ 满足 $D(\sigma,\tau)$ 有定义, 且 $\lambda_\infty(D(\sigma,\tau)) < \pi - 5\epsilon$. 对 $t \geqslant 0$, 记 γ_t 为 $D(\sigma,\tau)$ 中从 $\sigma(t)$ 到 $\tau(t)$ 的极小线段, D_t 为 $D(\sigma,\tau)$ 中由 $\sigma\,|_{[t,+\infty)}$, γ_t 和 $\tau\,|_{[t,+\infty)}$ 围成的非紧闭区域. 因为 $\lambda_{\mathrm{abs}}(\sigma) \leqslant \epsilon$, $\lambda_{\mathrm{abs}}(\tau) \leqslant \epsilon$, 且 γ_t 关于 D_t 是局部凹的, 由 Gauss-Bonnet 定理和关于 C_ϵ 的假设可以证明, 任给 $t \geqslant 0$,

$$5\epsilon < \pi - \lambda_\infty(D(\sigma,\tau)) = c(D_t) + \lambda(\partial D_t) \leqslant \theta(t) + \varphi(t) + \epsilon,$$

其中

$$\theta(t) := \angle(-\dot\sigma(t), \dot\gamma_t(0)), \quad \varphi(t) := \angle(-\dot\tau(t), -\dot\gamma_t(L(\gamma_t))).$$

因此由第一变分公式, 对几乎所有 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_{D(\sigma,\tau)}(\sigma(t),\tau(t)) &= \cos\theta(t) + \cos\varphi(t)\\ &\leqslant 2\cos\frac{\theta(t)+\varphi(t)}{2} < 2\cos 2\epsilon,\end{aligned}$$

上式结合 $d_{D(\sigma,\tau)}(\sigma(0),\tau(0)) \leqslant L(\partial C_\epsilon)$ 可得, 任给 $t > 0$,

$$d_{D(\sigma,\tau)}(\sigma(t),\tau(t)) - L(\partial C_\epsilon) < 2t\cos 2\epsilon. \tag{3.7.1}$$

现在假设对某个 $t_0 \geqslant 0$, γ_{t_0} 与 $I(\sigma,\tau)$ 相交, 且 p 是 $\gamma_{t_0} \bigcap I(\sigma,\tau)$ 中一点. 记 σ 和 τ 是边界曲线, 于是应用引理 3.7.1 得

$$\begin{aligned} d_{D(\sigma,\tau)}(\sigma(t_0),\tau(t_0)) \geqslant\ & d_{D(\sigma,\tau)}(\sigma(0),\sigma(t_0)) + d_{D(\sigma,\tau)}(\tau(0),\tau(t_0)) \\ & - d_{D(\sigma,\tau)}(\sigma(0),p) - d_{D(\sigma,\tau)}(\tau(0),p) \\ \geqslant\ & 2t_0 \cos\epsilon - L(\partial C_\epsilon). \end{aligned}$$

结合上式与 (3.7.1) 可知 $t_0 < T$. 证毕.

为简便起见, 记 $\Pi := \Pi_{C_\epsilon}$. 对 $r>0$, 定义映射 $f_{\epsilon,r} : M \longrightarrow$ 锥 $M(\infty)$ 为

$$f_{\epsilon,r}(p) := \begin{cases} o, & p \in C_\epsilon; \\ (\Pi_{C_\epsilon}(p), d(p,C_\epsilon)/r), & p \in M \setminus C_\epsilon. \end{cases}$$

我们在最后将证明 $f_{\epsilon,r}$ 是逼近. 以下引理对证明起着重要作用.

引理 3.7.3 设 p 和 q 是包含于 $M \setminus C_\epsilon$ 的同一个连通分支中的两个点. 假设 $H := D(\sigma^-_{\Pi(p)}, \sigma^+_{\Pi(q)})$ 包含 p 和 q (见 §3.4 中 $\sigma^\pm_x$ 的定义) . 记 d_H 为 H 上的内部距离函数, ρ_H 为 $(H(\infty), \hat{d}_\infty)$ 的欧氏锥上的距离函数, 其中 $\hat{d}_\infty$ 是 $H(\infty)$ 上的内蕴 Tits 度量. 则有

$$\frac{d_H(p,q)}{r} = \rho_H(f_{\epsilon,r}(p), f_{\epsilon,r}(q)) + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right),$$

其中 $\omega(\cdot,\cdot)$ 不依赖于 p 和 q 的选取.

证明 首先在 $\lambda_\infty(H) < \pi - 5\epsilon$ 的假设下证明引理. 由引理 3.7.2, 可以选取从 $\sigma^-_{\Pi(p)}(T)$ 到 $\sigma^+_{\Pi(q)}(T)$ 的极小线段 γ_T, 使其不与 ∂C_ϵ 相交. 我们先来证明:

子引理 3.7.1 存在常数 $c = c(T, L(\partial C_\epsilon)) > 0$, 使得由四条曲线 $\sigma^-_{\Pi(p)}|_{[0,T]}$, γ_T, $\sigma^+_{\Pi(q)}|_{[0,T]}$ 和 $I(\sigma^-_{\Pi(p)}, \sigma^+_{\Pi(q)})$ 围成的紧致区域 D, 其直径小于等于 c.

子引理 3.7.1 的证明 取定点 $x_0 \in \partial D$. 选取由 D 中长度递减过程所构造的曲线的连续变分 $\{c_t : [0,1] \longrightarrow D\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$, 使得任给 $t \in [0,1]$, $c_t(0) = c_t(1) = x_0$, 并且 c_0 是围成 D 的闭曲线 (或回路) . 这里 c_1 是局部极小简单闭曲线或者是像为 $\{x_0\}$ 的常值映射.

若 $c_1[0,1] \neq \{x_0\}$, 则由 c_1 围成的紧致集 D' 除在点 x_0 以外是局部凹的. 因此由 Gauss-Bonnet 定理知 $c(D') \geqslant \pi$, 这与 $\displaystyle\int_{M\setminus C_\epsilon} |\, G \,|\, \mathrm{d}M \leqslant \epsilon \ll 1$ 矛盾.

因此 $c_1[0,1] = \{x_0\}$. 对任意的 $x \in D$, 存在 $t(x) \in [0,1]$, 使得 $x \in c_{t(x)}$. 因此我们有

$$d(x_0, x) \leqslant \frac{L(c_{t(x)})}{2} \leqslant \frac{L(\partial D)}{2},$$

因而 diam $D \leqslant L(\partial D) \leqslant 2(2T + L(\partial C_\epsilon))$. 子引理证毕.

设 σ_p (σ_q) 是从 C_ϵ 到 p (q) 的极小线段. 注意到 $\sigma_p, \sigma_q \subset H$. 记 I_- (I_+) 为从 $\sigma^-_{\Pi(p)}(0)$ 到 $\sigma_p(0)$ (从 $\sigma_p(0)$ 到 $\sigma^+_{\Pi(p)}(0)$) 的 $I(\sigma^-_{\Pi(p)}, \sigma^+_{\Pi(p)})$ 的子弧段; 见图 3.7.2.

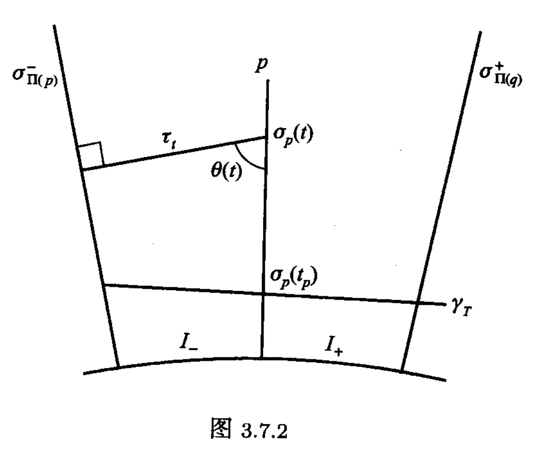


图 3.7.2

子引理 3.7.2 如果 $d(p, C_\epsilon)/r \geqslant \epsilon$, 则

$$\lambda(I_\pm) = \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right).$$

子引理 3.7.2 的证明 由 C_ϵ 的假设知 $0 = d_\infty(\sigma^-_{\Pi(p)}, \sigma^+_{\Pi(p)}) = -\lambda(I_-) - \lambda(I_+) + \omega(\epsilon)$, 则有

$$|\lambda(I_-) + \lambda(I_+)| \leqslant \omega(\epsilon). \tag{3.7.2}$$

首先考虑 $\lambda(I_-) \geqslant \lambda(I_+)$ 的情形. 设 τ_t 是 H 中连接 $\sigma_p(t)$ 和 $\sigma^-_{\Pi(p)}$ 的极小线段. 对 H 中由 $\sigma_p|_{[0,t]}$ 和 τ_t 围成的区域 D_t 用 Gauss-Bonnet 定理得

$$\theta(t) - \frac{\pi}{2} - \lambda(I_-) - \lambda(\tau_t) = \omega(\epsilon), \tag{3.7.3}$$

其中 $\theta(t) := \angle_{\sigma_p(t)} D_t$. 我们假设 $r\epsilon$ 大于子引理 3.7.1 中的常数 c. 于是 $d(p, C_\epsilon) \geqslant r\epsilon > c$. 因此 σ_p 与 γ_T 相交. 设 t_p 满足 $\sigma_p \bigcap \gamma_T = \{\sigma_p(t_p)\}$, 则对任意的 $t \in [0, t_p]$, $L(\tau_t) \leqslant c$. 由 γ_T, σ_p 和 τ_t 的极小性质可知, 任给 $t > t_p$, τ_t 不与 I_+ 相交, 但可能与 I_- 相交. 因此对任意的 $t \geqslant t_p$,

$$\lambda(\tau_t) \geqslant 0.$$

这结合 (3.7.3) 式可知, 对任意的 $t \geqslant t_p$,

$$\theta(t) \geqslant \frac{\pi}{2} + \lambda(I_-) + \omega(\epsilon).$$

由第一变分公式得

$$
\begin{aligned}
-L(\tau_{t_p}) \leqslant L(\tau_{d(p,C_\epsilon)}) - L(\tau_{t_p}) &= \int_{t_p}^{d(p,C_\epsilon)} \cos\theta(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant (d(p,C_\epsilon) - t_p)\sin(-\lambda(I_-) + \omega(\epsilon)).
\end{aligned}
$$

由于 $d(p,C_\epsilon) \geqslant \epsilon r$ 且 $L(\tau_{t_p}) \leqslant c$, 故

$$
\lambda(I_+) \leqslant \lambda(I_-) \leqslant \arcsin\min\left(\frac{c}{\epsilon r - t_p}, 1\right) + \omega(\epsilon) = \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right).
$$

结合上式及 (3.7.2) 式即证得子引理的结论.

若 $\lambda(I_+) \geqslant \lambda(I_-)$, 用相同的方法可以证明子引理. 证毕.

若 $d(p,C_\epsilon)/r < \epsilon$, 则由三角不等式得

$$
\frac{d_H(p,q)}{r} = \frac{d(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right),
$$

即证明了引理 3.7.3 的结论. 这里注意到在 H 上, $d(\cdot,C_\epsilon)=d_H(\cdot,C_\epsilon)$. 若 $d(q,C_\epsilon)/r < \epsilon$, 用相似的方法也可以证明.

假设 $d(p,C_\epsilon)/r \geqslant \epsilon$, $d(q,C_\epsilon)/r \geqslant \epsilon$, 则由子引理 3.7.1 和假设 $r \gg 1/\epsilon$, 可知 σ_p 与 γ_T 相交于某点 P; 取 s_p 和 t_p 使得 $\gamma_T(s_p) = \sigma_p(t_p) = P$. 类似地定义点 Q 和 s_q, t_q. 见图 3.7.3.

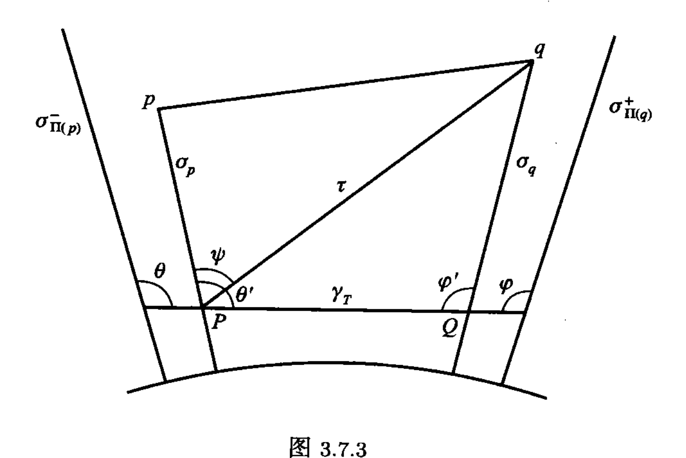


图 3.7.3

记

$$
\begin{aligned}
\theta &:= \angle(\dot\gamma_T(0), \dot\sigma^-_{\Pi(p)}(T)), \quad \theta' := \angle(\dot\gamma_T(s_p), \dot\sigma_p(t_p)), \\
\varphi &:= \angle(-\dot\gamma_T(L(\gamma_T)), \dot\sigma^+_{\Pi(q)}(T)), \quad \varphi' := \angle(-\dot\gamma_T(s_q), \dot\sigma_q(t_q)).
\end{aligned}
$$

由子引理 3.7.2, 对 H 中由 $\sigma^-_{\Pi(p)}\mid_{[0,T]}$, $\gamma_T\mid_{[0,s_p]}$, $\sigma_p\mid_{[0,t_p]}$ 和 I_- 围成的区域, 应用 Gauss-Bonnet 定理得

$$\theta = \theta' + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right), \quad \varphi = \varphi' + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right).$$

选取从 P 到 q 的极小线段 τ, 考虑以 $\angle q$, $\angle P$, $\angle Q$ 为内角的 $\triangle qPQ$. 由于

$$\frac{d_H(P,Q)}{r} = \omega\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{d_H(q,P)}{r} = \frac{d(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\frac{1}{r}\right),$$

并且

$$\frac{d_H(q,Q)}{r} = \frac{d(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\frac{1}{r}\right),$$

由定理 3.6.1 得

$$\begin{aligned}\cos\angle q = &\frac{1}{2d_H(q,P)d_H(q,Q)} \times \Big\{d_H(q,P)^2 + d_H(q,Q)^2 - d_H(P,Q)^2 \\ &+ (d_H(q,P) + d_H(q,Q) + d_H(P,Q))^2\omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right)\Big\} \\ \geqslant\, & 1 - \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right),\end{aligned}$$

因而

$$\angle P + \varphi' = \pi - \angle q + \omega(\epsilon) = \pi - \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right).$$

所以 $\psi := \angle(\dot{\sigma_p}(t_p), \dot{\tau}(0))$ 满足

$$\begin{aligned}\psi &= \theta' - \angle P = \theta + \varphi' - \pi + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right) = \theta + \varphi - \pi + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right) \\ &= \hat{d}_\infty(\Pi(p), \Pi(q)) + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{d_H(P,p)}{r} = \frac{d(p,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{d_H(P,q)}{r} = \frac{d(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\frac{1}{r}\right)$$

并且对 $\triangle Ppq$ 应用定理 3.6.1 可得

$$\begin{aligned}\frac{d_H(p,q)^2}{r^2} = &\frac{d(p,C_\epsilon)^2}{r^2} + \frac{d(q,C_\epsilon)^2}{r^2} \\ &-2\frac{d(p,C_\epsilon)}{r}\frac{d(q,C_\epsilon)}{r}\cos\hat{d}_\infty(\Pi(p),\Pi(q)) + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

引理证毕.

接下来在 $\lambda_\infty(H) \geqslant \pi - 5\epsilon$ 的条件下证明引理. 选取 H 中连接 p 和 q 的极小线段 γ. 若 γ 与 C_ϵ 相交, 则由三角不等式得

$$\frac{d_H(p,q)}{r} = \frac{d(p,C_\epsilon)}{r} + \frac{d(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\frac{1}{r}\right),$$

上式与 $\lambda_\infty(H) \geqslant \pi - 5\epsilon$ 一起可得引理结论. 假设 γ 不与 C_ϵ 相交, 则由映射 $t \mapsto \Pi(\gamma(t))$ 的连续性, 存在 $x_0 \in \gamma$, 使得 $\lambda_\infty(H') = \pi - 6\epsilon$, 其中 $H' := D(\sigma^-_{\Pi(p)}, \sigma^+_{\Pi(x_0)})$. 对 $p, x_0 \in H'$, 应用引理的第一种情况可得

$$\begin{aligned}\frac{d_H(p,x_0)}{r} = \frac{d_{H'}(p,x_0)}{r} &= \rho_{H'}(f_{\epsilon,r}(p), f_{\epsilon,r}(x_0)) + \omega\left(\epsilon, \frac{1}{r}\right)\\ &= \frac{d_H(p,C_\epsilon)}{r} + \frac{d_H(x_0,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right),\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}\frac{d_H(p,q)}{r} &= \frac{d_H(p,x_0)}{r} + \frac{d_H(x_0,q)}{r}\\ &= \frac{d_H(p,C_\epsilon)}{r} + \frac{d_H(x_0,C_\epsilon)}{r} + \frac{d_H(x_0,q)}{r} + \omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right)\\ &\geqslant \frac{d_H(p,C_\epsilon)}{r} + \frac{d_H(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right)\\ &= \rho_H(f_{\epsilon,r}(p), f_{\epsilon,r}(q)) + \omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

更进一步, 由三角不等式可以得到与上式反向的不等式, 于是证得引理 3.7.3 的结论. 证毕.

定理 3.7.1 映射 $f_{\epsilon,r} : (1/r)B(C_\epsilon, r) \longrightarrow B(o,1;\text{cone } M(\infty))$ 为 $\omega(\epsilon, 1/r)$-逼近, 其中 $B(o,1;\ \text{cone } M(\infty))$ 是锥 $M(\infty)$ 中以 o 为中心 1 为半径的度量球.

证明 容易验证 $f_{\epsilon,r}$ 的满射性. 设 $p,q \in M$, 只需证明

$$\frac{d(p,q)}{r} = \rho(f_{\epsilon,r}(p), f_{\epsilon,r}(q)) + \omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right), \tag{3.7.4}$$

其中 $\omega(\cdot,\cdot)$ 不依赖于 p 和 q. 若 p 或 q 属于 C_ϵ, 则 (3.7.4) 式显然成立. 假设 $p,q \in M \setminus C_\epsilon$. 选取连接 p 和 q 的极小线段 γ. 若 γ 与 C_ϵ 相交, 则

$$\begin{aligned}\frac{d(p,q)}{r} &= \frac{d(p,C_\epsilon)}{r} + \frac{d(q,C_\epsilon)}{r} + \omega\left(\frac{1}{r}\right)\\ &\geqslant \rho(\Pi(p),\Pi(q)) + \omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right).\end{aligned} \tag{3.7.5}$$

若 p 和 q 包含在 $M\setminus C_\epsilon$ 的两个不同分支中, 则 γ 与 C_ϵ 相交. 于是由 (3.7.5) 式和 $d_\infty(\Pi(p),\Pi(q))=+\infty$ 可得 (3.7.4) 式. 因此, 假设 p 和 q 包含于 $\overline{M\setminus C_\epsilon}$ 的同一个连通分支, 记为 V. 对 p 和 q 作必要的交换后, 可以假设 $p,q\in H:=D(\sigma^-_{\Pi(p)},\sigma^+_{\Pi(q)})$.

现在考虑 V 是黎曼半平面的情形, 则由引理 3.7.3 得

$$\frac{d(p,q)}{r}\leqslant\frac{d_H(p,q)}{r}=\rho_H(\Pi(p),\Pi(q))+\omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right)$$

$$=\rho(\Pi(p),\Pi(q))+\omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right). \tag{3.7.6}$$

若 γ 与 C_ϵ 相交, 则由 (3.7.5) 和 (3.7.6) 可得 (3.7.4). 若 γ 与 C_ϵ 不相交, 则 γ 包含于 H 之中, 且 $d(p,q)=d_H(p,q)$, 这与 (3.7.6) 式结合可得 (3.7.4) 式.

接下来考虑 V 为黎曼半柱面的情形. 设 $H':=\overline{V\setminus H}$, 由引理 3.7.3 得

$$\frac{d(p,q)}{r}\leqslant\frac{d_H(p,q)}{r}=\rho_H(\Pi(p),\Pi(q))+\omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{d(p,q)}{r}\leqslant\frac{d_{H'}(p,q)}{r}=\rho_{H'}(\Pi(p),\Pi(q))+\omega\left(\epsilon,\frac{1}{r}\right)$$

并且

$$\rho(\Pi(p),\Pi(q))=\min\{\rho_H(\Pi(p),\Pi(q)),\rho_{H'}(\Pi(p),\Pi(q))\}.$$

若 γ 与 C_ϵ 相交, 则由上式和 (3.7.5) 式可得 (3.7.4) 式. 若 γ 与 C_ϵ 不相交, 则

$$d(p,q)=\min\{d_H(p,q),d_{H'}(p,q)\}.$$

定理证毕.

由定理 3.7.1 可得

定理 3.7.2 假设 $\lambda_\infty(M)<+\infty$, $p\in M$ 是任意固定点. 则当 $r\to+\infty$ 时, 带基点的空间 $((1/r)M,p)$ 在带基点的 Gromov-Hausdorff 收敛意义下趋向于 $(\mathrm{cone}\ M(\infty),o)$.

接下来考虑直线与理想边界上 Tits 度量的关系.

对任意满足 $\gamma|_{(-\infty,0]}\in\mathcal{C}_M$ 的曲线 $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow M$, 记 $\gamma(-\infty)$ 为 $\gamma|_{(-\infty,0]}$ 的类.

定理 3.7.3 若 γ 是 M 中的直线, 则

$$d_\infty(\gamma(-\infty),\gamma(\infty))\geqslant\pi.$$

证明 由推论 2.2.1 直接可得定理结论. 证毕.

注 3.7.1 利用定理 3.7.1 可以给出以上定理的另一个证明. 假设 γ 为直线, 且 $d_\infty(\gamma(-\infty),\gamma(\infty)) < \pi$. 通过 γ 的参数作必要的倒换, 对某个 $a \geqslant 0$, 存在黎曼半平面 $H = D(\gamma\mid_{(-\infty,-a]},\gamma\mid_{[a,+\infty)})$, 使得 $\lambda_\infty(H) = d_\infty(\gamma(-\infty),\gamma(\infty)) < \pi$. 对 H 应用定理 3.7.1 可以得到矛盾, 因为任何直线的 Gromov-Hausdorff 极限仍然为直线.

定理 3.7.4 对任意满足 $d_\infty(x,y) > \pi$ 的 $x,y \in M(\infty)$, 存在 M 中的直线 γ, 使得 $\gamma(-\infty) = x$, $\gamma(\infty) = y$.

证明 设 $x,y \in M(\infty)$, 取 M 的柱心 C. 对每个 $t \geqslant 0$, 取 M 中连接 $\sigma_x(t)$ 和 $\sigma_y(t)$ 的极小线段 γ_t. 假设

$$\liminf_{t\to+\infty} d(\gamma_t, C) = +\infty.$$

则存在 $\overline{M\setminus C}$ 的连通分支 V, 使得 $V(\infty) \ni x,y$. 若 V 是黎曼半柱面, 则对充分大的 t, γ_t 包含于 $D(\sigma_x,\sigma_y)$ 或 $D(\sigma_y,\sigma_x)$ 之中. 若 V 是黎曼半平面, 则对充分大的 t, 在 $D(\sigma_x,\sigma_y)$ 有定义的条件下, γ_t 包含于 $D(\sigma_x,\sigma_y)$ 之中. 因此不失一般性, 可以假设对某个趋向于 $+\infty$ 的单调递增正数序列 $\{t_i\}_{i=1,2,\cdots}$, 线段 γ_{t_i} 完全包含于 $D(\sigma_x,\sigma_y)$ 之中. 为简便起见, 记 $D := D(\sigma_x,\sigma_y)$. 对每个 i, 设 D_i 是 D 中由 $\sigma_x\mid_{[0,t_i]}$, $I(\sigma_x,\sigma_y)$, $\sigma_y\mid_{[0,t_i]}$ 和 γ_{t_i} 围成的紧致区域. 则 $\{D_i\}$ 是覆盖 D 的单调递增序列. 因此

$$\lim_{i\to\infty} c(D_i) = c(D),$$

$$\lim_{i\to\infty} (\lambda(\partial D_i) - (\pi - \theta_i) - (\pi - \varphi_i)) = \lambda(\partial D),$$

其中 $\theta_i := \angle_{\sigma_x(t_i)} D_i, \varphi_i := \angle_{\sigma_y(t_i)} D_i$. 由 Gauss-Bonnet 定理可知

$$c(D_i) + \lambda(\partial D_i) = 2\pi.$$

因此

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) \leqslant \lambda_\infty(D) &= \pi - \lambda(\partial D) - c(D) \\ &= \pi - \lim_{i\to\infty} (\theta_i + \varphi_i) \leqslant \pi. \end{aligned}$$

现在假设对给定的两点 $x,y \in M(\infty)$, $d_\infty(x,y) > \pi$. 由以上的讨论可知, 存在趋向于 $+\infty$ 的正数序列 $\{t_i\}$, 使得 $\{d(\gamma_{t_i}, C)\}$ 一致有界, 于是存在 $\{\gamma_{t_i}\}$ 的收敛于曲线即直线 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ 的子序列. 由于 $\gamma\mid_{(-\infty,0]}$ 和 $\gamma\mid_{[0,+\infty)}$ 分别平行于 σ_x 和 σ_y, 可以得到 $\gamma(-\infty) = x$, $\gamma(\infty) = y$. 证毕.

注 3.7.2 对于两个给定的点 $x, y \in M(\infty)$, 通常不能确定是否存在直线 γ, 使得 $\gamma(-\infty) = x$, $\gamma(\infty) = y$. 实际上, 若 $M = \mathbb{R}^2$ 具有平坦度量, 则总存在这样的直线. 然而, 存在全曲率为 0 的黎曼平面 (即, $M(\infty)$ 等距于单位圆) 不包含直线. 见以下的例子.

例 3.7.1 (参见 [64]) 对于两个正数 y_0 和 y_1, 满足 $y_0 + \pi/2 < y_1$, 设 $f : (0, y_1) \longrightarrow (0, +\infty)$ 为 C^∞ 函数, 使得

$$f(0+) = +\infty,$$
$$\text{在 } (0, y_0) \text{ 上}, f > 1, \quad f' < 0, \quad f'' > 0,$$
$$\text{在 } [y_0, y_0 + \pi/2] \text{ 上}, f = 1,$$
$$f(y_1-) = 0, \quad f'(y_1-) = -\infty, \quad f^{(n)}(y_1-) = 0, \qquad n \geqslant 2,$$

其中 $a+$ (a_-) 表示 $y < a$ $(y > a)$ 并且趋向于 a. 对 $\mathbb{R}^3$ 的坐标 (x, y, z), 子集

$$\{(f(y), y, 0); y \in (0, y_1)\} \bigcup \{(0, y_1, 0)\}$$

是光滑 xy- 平面曲线的像, 它可以生成以 y 轴为旋转轴的旋转曲面 M; 见图 3.7.4. 曲面 M 满足 $c(M) = 0$, 或等价地 $\lambda_\infty(M) = 2\pi$.

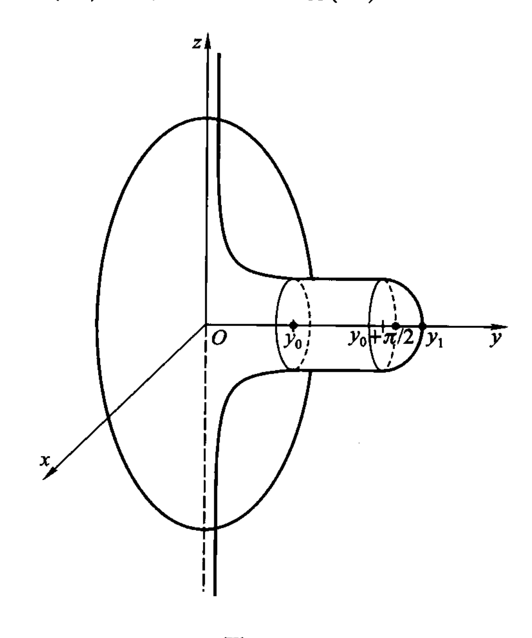


图 3.7.4

现在来证明 M 中不存在直线. 将 M 划分为以下三个区域:

- $M_1 := M \bigcap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y_0 + \pi/2 < y \leqslant y_1\}$ 为 $G > 0$ 的开圆盘区域;

- $M_2 := M\bigcap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; y_0\leqslant y\leqslant y_0+\pi/2\}$ 为平坦柱面;
- $M_3 := M\bigcap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 0<y<y_0\}$ 为 $G<0$ 的开柱面.

假设 M 中存在直线 γ. 一方面, 若 γ 通过 $M_1\bigcup M_2$ 中的一个点, 则它与 M_1 和 M_3 都相交, 于是存在 $t_1<t_2<t_3$, 使得 $\gamma(t_1),\gamma(t_3)\in\partial M_3$, $\gamma(t_2)\in M_1$. 因此 $L(\gamma\mid_{[t_1,t_3]})>2d(M_1,M_3)=\pi$. 另一方面, $d(\gamma(t_1),\gamma(t_3))\leqslant \operatorname{diam}\partial M_3=\pi$. 这与 γ 的极小性矛盾. 因此 γ 必然包含于 M_3 中. 因为 $d_\infty(\gamma(-\infty),\gamma(\infty))=\pi$, 这两个由 γ 曲线围成的半平面的全曲率均为 0, 这与其中的一个是 M_3 的子集矛盾. 因此 M 中不存在直线.

§8 Busemann 函数的性态

本节将结合理想边界上的 Tits 度量考虑 Busemann 函数的渐近状态和穷竭性质; 这在 [78, 79, 42, 91] 中已作过研究. 这里我们将已知的定理推广到流形的边界可能为非空的情形.

首先, 我们给出 Busemann 函数的定义, 并证明它的一些基本性质. 假设 M 为可能有边界的完备非紧黎曼流形.

定义 3.8.1 (Busemann 函数) 定义关于 M 中的射线 σ 的 Busemann 函数 $F_\sigma: M\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$F_\sigma(x) := \lim_{t\to\infty}\{t-d(x,\sigma(t))\},\qquad x\in M.$$

由于函数 $t\mapsto t-d(x,\sigma(t))$ 单调不减, 并且由三角不等式可知该函数有上界 $d(x,\gamma(0))$, 因此定义中的极限总是存在的. 容易证明 F_σ 是 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为 1.

定义 3.8.2 (梯度向量) 称函数 $f: M\longrightarrow\mathbb{R}$ 在点 $x\in M$ 处可微, 若存在向量 $\nabla f(x)\in T_xM$, 使得对任意的 $v\in T_xM$,

$$f(\exp_x v)=f(x)-<\nabla f(x),v>+o(\mid v\mid).$$

这里的向量 $\nabla f(x)$ 称为梯度向量.

由以下定理可知任意 Busemann 函数几乎处处可微:

定理 3.8.1 (Rademacher) 任意 Lipschitz 函数 $f: M\longrightarrow\mathbb{R}$ 几乎处处可微.

对于一个 Lipschitz 函数 $f: M\longrightarrow\mathbb{R}$ 和 $x\in M$, 定义

$$\overline{\nabla} f(x) := T_xM\bigcap\overline{\{\nabla f(y); y \text{ 为 } f \text{ 的可微点}\}}.$$

定理 3.8.2 (参见 [80]中定理 1.1) 设 σ 为 M 中的射线, 则有以下结论成立:

(1) 当 $t\to\infty$ 时, $B(\sigma(t),t-a)\uparrow F_\sigma^{-1}(a,\infty)$.

(2) 对任意满足 $F_\sigma(x)>a$ 的 $x\in M$ 和 $a\in F_\sigma(M)$, 有

$$F_\sigma(x)=a-d(x,F_\sigma^{-1}(a)).$$

(3) 对任意渐近于 σ 的射线 γ, 有任意 $t\geqslant 0$,

$$F_\sigma\circ\gamma(t)=t+F_\sigma\circ\gamma(0).$$

(4) 对任意渐近于 σ 的射线 γ, 以及任意满足 $\gamma(a)\in \mathrm{int}\ M:=M\setminus\partial M$ 的 $a>0$, Busemann 函数 F_σ 在 $\gamma(a)$ 点可微且 $\nabla F_\sigma(\gamma(a)):=\dot\gamma(a)$.

(5) 任给 $x\in\mathrm{int}\ M$, 从 x 出发渐近于 σ 的射线的初始向量集与 $\overline{\nabla}F_\sigma(x)$ 重合.

(6) 对 F_σ 的任意可微点 $x\in\mathrm{int}\ M$, 有 $\overline{\nabla}F_\sigma(x)=\{\nabla F_\sigma(x)\}$.

证明 (1) 由三角不等式可得 $B(\sigma(t),t-a)$ 的单调性. 为了证明 $\bigcup\limits_{t>a}B(\sigma(t),t-a)\subset F_\sigma^{-1}(a,\infty)$, 任取点 $x\in B(\sigma(t),t-a)$, 则可得 $F_\sigma(x)\geqslant t-d(x,\sigma(t))>a$, 这表明 $x\in F_\sigma^{-1}(a,\infty)$. 为证明 $\bigcup\limits_{t>a}B(\sigma(t),t-a)\supset F_\sigma^{-1}(a,\infty)$, 任取 $x\in F_\sigma^{-1}(a,\infty)$, 则存在 $t>a$, 使得 $t-d(x,\sigma(t))>a$, 于是 $x\in B(\sigma(t),t-a)$. 由此便证明了 (1).

(2) 设 $x\in M$, $a\in\mathbb{R}$, 满足 $F_\sigma(x)>a$, 则

$$t-d(x,\sigma(t))=a-d(x,B(\sigma(t),t-a)),$$

结合 (1) 可知

$$F_\sigma(x)=a-d(x,F_\sigma^{-1}(a,\infty)),$$

其中 $\partial F_\sigma^{-1}(a,\infty)=F_\sigma^{-1}(a)$. 于是证明了 (2).

(3) 存在趋向于 γ 的极小线段序列 $\{\sigma_i:[0,l_i]\longrightarrow M\}$, 使得对每个 i, $\sigma(t_i)=\sigma_i(l_i)$, 且 $t_i,l_i\to+\infty$. 于是对任意取定的 $t\geqslant 0$, 当 $i\to\infty$ 时有

$$\mid d(\gamma(t),\sigma(t_i))-d(\sigma_i(t),\sigma(t_i))\mid\leqslant d(\gamma(t),\sigma_i(t))\to 0,$$

因而

$$\begin{aligned}F_\sigma\circ\gamma(t)&=\lim_{i\to\infty}\{t_i-d(\sigma_i(t),\sigma(t_i))\}\\&=t+\lim_{i\to\infty}\{t_i-d(\sigma_i(0),\sigma(t_i))\}=t+F_\sigma\circ\gamma(0).\end{aligned}$$

(4) 设 γ 是渐近于 σ 的射线, $a>0$ 满足 $\gamma(a)\in\mathrm{int}\ M$. 记 $\delta:=(\mathrm{conv}\ \gamma(a))/3$, 取 $b\in(a,a+\delta)$. 记 $S(p,r)$ 是以 p 为中心半径为 $r>0$ 的度量球. 由于 $\Sigma_\pm:=$

$S(\gamma(b\pm\delta),\delta)$ 包含在 $B(\gamma(a),3\delta)$ 之中, 故 $\Sigma_\pm$ 均为光滑超曲面. 由于对 $t\in(b-\delta,a]$, 从 $\gamma(t)$ 到 $\Sigma_\pm$ 的极小线段 $\gamma\mid_{[t,b]}$ 是唯一的, 故函数 $d(\cdot,\Sigma_\pm)$ 在 $\gamma(a)$ 处可微, 且它的梯度为 $-\dot\gamma(a)$, 即对任意 $v\in T_{\gamma(a)}M$,

$$d(\exp_{\gamma(a)}v,\Sigma_\pm)=b-a-<\dot\gamma(a),v>+o(\mid v\mid). \tag{3.8.1}$$

记 $\alpha:=F_\sigma(\gamma(b))$, 则由 (1) 得

$$M\setminus B(\gamma(b-\delta),\delta)\supset F_\sigma^{-1}(\alpha,\infty)\supset B(\gamma(b+\delta),\delta),$$

因此

$$d(\cdot,\Sigma_-)\leqslant d(\cdot,F_\sigma^{-1}(\alpha))\leqslant d(\cdot,\Sigma_+),$$

上式结合 (3.8.1) 式可知, 对任意的 $v\in T_{\gamma(a)}M$,

$$d(\exp_{\gamma(a)}v,F_\sigma^{-1}(\alpha))=b-a-<\dot\gamma(a),v>+o(\mid v\mid).$$

由于 $d(\cdot,F_\sigma^{-1}(\alpha))=\alpha-F_\sigma$, 于是证明了 (4).

(5) 设 γ 是任意从 $x\in\operatorname{int}M$ 出发渐近于 σ 的射线. 则由 (4) 可知, 对充分小的 $a>0$, $\dot\gamma(a)=\nabla F_\sigma(\gamma(a))$. 这表明 $\dot\gamma(0)\in\overline{\nabla}F_\sigma(x)$.

反之, 对任意的 $v\in\overline{\nabla}F_\sigma(x)$ 和 $x\in\operatorname{int}M$, 存在序列 $x_i\to x$, 使得 $\nabla F_\sigma(x_i)\to v$. 若 γ_i 是从 x_i 出发渐近于 σ 的射线, 则由 (3) 得 $(F_\sigma\circ\gamma_i)'(0)=1$, 因而 $\dot\gamma_i(0)=\nabla F_\sigma(x_i)\to v$. γ_i 的极限是从 x 出发以 v 为初始向量且渐近于 σ 的射线. 这就证明了 (5).

(6) 假设 F_σ 在点 $x\in\operatorname{int}M$ 处可微, 由 (5), 对任意 $v\in\overline{\nabla}F_\sigma(x)$, 选取从 x 出发的初始向量为 v 的射线 γ, 则由 (3) 知 $(F_\sigma\circ\gamma)'(0)=1$, 因而 $\nabla F_\sigma(x)=v$. 证毕.

注 3.8.1　若 M 无边, 则定理 3.8.2 中 (3) 的逆命题也成立. 具体地说, 若单位速度曲线 $\gamma:[0,+\infty)\longrightarrow M$ 对任意的 $t\geqslant0$ 满足

$$F_\sigma\circ\gamma(t)=t+F_\sigma\circ\gamma(0),$$

则 γ 是渐近于 σ 的射线. 证明见 [80] 中的定理 1.1 的 (4).

现在假设 H 是在无穷处容许曲率的黎曼半平面. 对 $a,b\geqslant0$, 假设 $\sigma:=\partial H\mid_{(-\infty,-a]}$ 和 $\tau:=\partial H\mid_{[b,+\infty)}$ 是 H 中的射线 (不必是测地线), 其中 $\mathbb{R}\ni t\mapsto\partial H(t)$ 是 ∂H 的正弧长参数表示. 对每个 $s,t\geqslant0$, 选取 H 中由从 $\sigma(s)$ 到 $\tau(t)$ 的极小线段 $\gamma_{s,t}$ 围成的紧致可缩区域 $D_{s,t}$. 可以假设 $D_{s,t}$ 关于 s 和 t 单调不减. 区域 $D_t:=\bigcup\limits_{s\geqslant0}D_{s,t}$ 由渐近于 σ 的射线 $\gamma_t:=\lim\limits_{s\to\infty}\gamma_{s,t}$ 所围成. 角

$\theta_{s,t} := \angle_{\tau(t)}(H \setminus D_{s,t})$ 关于 s 单调不增, 且当 $s \to \infty$ 时趋向于 $\theta_t := \angle_{\tau(t)}(H \setminus D_t)$. 由于 D_t 关于 t 单调不减, 故射线 γ_t 关于 t 相对于 $\mathcal{C}_H$ 上的序关系单调不减. 因此 $\{\gamma_t\}_{t \geqslant 0}$ 只满足以下条件之一:

(1) 对 H 的任意紧致子集 K, 存在 $t_0 \geqslant 0$, 使得任给 $t \geqslant t_0$, γ_t 与 K 不相交.

(2) 当 $t \to \infty$ 时, 射线 γ_t 收敛于 H 中的直线.

我们将证明:

引理 3.8.1 若 $\{\gamma_t\}$ 发散, 则

$$\lim_{t \to \infty} \theta_t = \lambda_\infty(H) \leqslant \pi.$$

证明 由于每个 γ_t 平行于 σ, 故有

$$0 = \lambda_\infty(D_t) = \pi - \lambda(\partial D_t) - c(D_t).$$

因为 $\{\gamma_t\}$ 发散, 故

$$\lim_{t \to \infty} (\lambda(\partial D_t) - (\pi - \angle_{\sigma(t)} D_t)) = \lambda(\partial H),$$

$$\lim_{t \to \infty} c(D_t) = c(H).$$

因此

$$\lim_{t \to \infty} (\pi - \angle_{\sigma(t)} D_t) = \pi - \lambda(\partial H) - c(H) = \lambda_\infty(H).$$

特别地, $\lambda(\partial H)$ 有限. 这表明上式左边等于 $\lim\limits_{t \to \infty} \theta_t$, 并且不大于 π. 证毕.

引理 3.8.2 对几乎所有 $t \geqslant 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_\sigma(\tau(t)) = \cos \theta_t.$$

证明 任意取定 $t_1 > t_0 \geqslant 0$, 由于 F_σ 几乎处处可微, 由 Fubini 定理知, 存在趋向于 $\tau|_{[t_0,t_1]}$ 的分段光滑曲线序列 $\tau_i : [t_0, t_1] \longrightarrow H$, $i = 1, 2, \cdots$, 使得

(1) F_σ 在 τ_i 上几乎处处可微.

(2) τ_i 的右导数一致收敛于 $\tau|_{[t_0,t_1]}$ 的右导数.

于是有

$$F_\sigma(\tau_i(t_1)) - F_\sigma(\tau_i(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \nabla F_\sigma(\tau_i(t)), \dot{\tau}_i(t) \rangle \mathrm{d}t.$$

记 $V(t)$ (或 $V_i(t)$) 为 H 中从 $\tau(t)$ (或 $\tau_i(t)$) 出发渐近于 σ 的射线的初始向量的集合. 注意到由于 $\{t \geqslant 0; \sharp V(t) \geqslant 2\}$ 的测度为 0, 故由命题 3.2.2, 对几乎所有 t, $V(t) = \{\dot{\gamma}_t(0)\}$, 并且对任意 $t \in [t_0, t_1]$, $\lim\limits_{i \to \infty} V_i(t) \subset V(t)$. 若对 $t \in [t_0, t_1]$, F_σ 在

$\tau_i(t)$ 可微, 则由定理 3.8.2 的 (5) 和 (6) 知, $V_i(t) = \{\nabla F_\sigma(\tau_i(t))\}$. 因此对几乎所有 $t \in [t_0, t_1]$, $\lim_{i\to\infty} \nabla F_\sigma(\tau_i(t)) = \dot\gamma_t(0)$. 从而对几乎所有 $t \in [t_0, t_1]$,

$$\lim_{i\to\infty} \langle \nabla F_\sigma(\tau_i(t)), \dot\tau_i(t)\rangle = \cos\theta_t.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$F_\sigma(\tau(t_1)) - F_\sigma(\tau(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \cos\theta_t \mathrm{d}t.$$

由 θ_t 关于 t 几乎处处连续便得引理结论. 证毕.

注 3.8.2　若对几乎所有 $t \geqslant 0$, F_σ 在 $\tau(t)$ 处可微, 则引理 3.8.2 显然成立. 尽管如此, 以上结论在通常情况下仍然不成立.

引理 3.8.3　(1) 若 $\{\gamma_t\}$ 发散, 则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_\sigma(\tau(t))}{t} = \cos\lambda_\infty(H), \qquad \lambda_\infty(H) \leqslant \pi.$$

(2) 若 $\{\gamma_t\}$ 收敛, 则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_\sigma(\tau(t))}{t} = -1, \qquad \lambda_\infty(H) \geqslant \pi.$$

证明　(1) 由引理 3.8.1 和引理 3.8.2 可得结论.

(2) 假设当 $t \to \infty$ 时 γ_t 收敛于直线 γ. 则由推论 2.2.1 (参见定理 3.7.3) 知 $\lambda_\infty(H) \geqslant \pi$. 存在序列 $s_i \to \infty$, 使得当 $i \to \infty$ 时 $\gamma_{s_i,t}$ 趋向于 γ_t. 取 $i(t)$ 充分大, 则对所有 $t \geqslant 0$ 和 $i \geqslant i(t)$, $\gamma_{s_i,t}$ 的像和 M 上固定点之间的距离一致有界. 由三角不等式知, 对所有 $t \geqslant 0$ 和 $i \geqslant i(t)$, $|\, d(\sigma(s_i), \tau(t)) - s_i - t\,|$ 一致有界. 于是

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_\sigma(\tau(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{t} \lim_{i\to\infty} \{s_i - d(\sigma(s_i), \tau(t))\}\right] = -1.$$

证毕.

设 M 是有限连通的完备非紧 2 维流形, 并且在无穷处容许曲率.

定理 3.8.3　对 M 中任意的射线 σ 和 τ, 有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_\sigma(\tau(t))}{t} = \cos\min\{d_\infty(\sigma(\infty), \tau(\infty)), \pi\}.$$

证明　若 $\sigma \bigcap \tau$ 无界, 则存在 $a \in \mathbb{R}$ 和序列 $t_i \to \infty$, 满足对所有的 i, $\sigma(s_i) = \tau(s_i + a)$. 于是

$$F_\sigma(\tau(t)) = \lim_{i\to\infty} \{s_i - d(\tau(s_i + a), \tau(t))\} = t - a.$$

由于 $\sigma(\infty)=\tau(\infty)$, 故证得定理结论.

假设 $\sigma\bigcap\tau$ 有界, 则存在 M 的柱心 C, 使得 $\sigma[a,+\infty)\bigcap\tau[b,+\infty)=\varnothing$, $\sigma\mid_{[a,+\infty)}\bigcap C=\{\sigma(a)\}$ 且 $\tau\mid_{[b,+\infty)}\bigcap C=\{\tau(b)\}$. 对每个 i,选取任意的发散正数序列 $\{t_i\}$ 和从 $\tau(t_i)$ 出发渐近于 σ 的射线 γ_i.

若 $\{\gamma_i\}$ 的子列 $\{\gamma_{j(i)}\}$ 趋向于某条直线 γ, 则如引理 3.8.3(2) 中相同的讨论可得

$$\lim_{i\to\infty}\frac{F_\sigma(\tau(t_{j(i)}))}{t_{j(i)}}=-1,\qquad d_\infty(\sigma(\infty),\tau(\infty))\geqslant\pi.$$

假设 $\{\gamma_i\}$ 的子列 $\{\gamma_{j(i)}\}$ 没有聚合线. 则 $t\to\infty$ 时, 射线 $\sigma(t)$ 和 $\tau(t)$ 趋向于共同的端. 设 V 是与这个端相对应的 $\overline{M\setminus C}$ 的连通分支, 则对充分大的 i, 射线 $\gamma_{j(i)}$ 包含在 V 之中. 考虑包含在 V 中的连接 $p\in\sigma$ 和 $q\in\tau$ 的极小线段 $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$. 由于 σ,τ 在 ∂M 可能含有折点, 故极小线段 γ 不必只包含在 $D(\sigma,\tau)$ 和 $D(\tau,\sigma)$ 之中的一个里面. 但是我们可以选取从 p 到 q 的另一条极小线段 $\gamma':[0,l]\longrightarrow M$, 使它完全包含在 $D(\sigma,\tau)$ 和 $D(\tau,\sigma)$ 之中的一个里面. 实际上, 存在 $a,b\in[0,l]$, 使得 $\gamma(a)\in\sigma$, $\gamma(b)\in\tau$, $\gamma(a,b)\bigcap H=\varnothing$, 其中 H 是 $D(\sigma,\tau)$ 和 $D(\tau,\sigma)$ 中的一个. 则将 σ 上从 p 到 $\gamma(a)$ 的子弧段, $\gamma\mid_{[a,b]}$, 和 τ 上从 $\gamma(b)$ 到 q 的子弧段连接起来, 便是所求的极小线段 γ'. 因此, 可以将 $\gamma_{j(i)}$ 替换为完全包含于 $D(\sigma,\tau)$ 和 $D(\tau,\sigma)$ 之中一个里面的线段, 并且仍然不包含聚合线. 不失一般性, 假设 $\gamma_{j(i)}$ 包含在 $D(\sigma,\tau)=:H$ 里面. 则对所有的 i, $F_\sigma(\tau(t_{j(i)}))=F_\sigma^H(\tau(t_{j(i)}))$, 其中 F_σ^H 是 H 的内蕴 Busemann 函数, 即 H 的内蕴度量 d_H 定义的 Busemann 函数. 因而由引理 3.8.3 得

$$\lim_{i\to\infty}\frac{F_\sigma(\tau(t_{j(i)}))}{t_{j(i)}}=\lim_{i\to\infty}\frac{F_\sigma^H(\tau(t_{j(i)}))}{t_{j(i)}}=\cos\lambda_\infty(H),$$

$$\lambda_\infty(H)\leqslant\pi. \tag{3.8.2}$$

若 V 是黎曼半平面, 则有 $d_\infty(\sigma(\infty),\tau(\infty))=\lambda_\infty(H)$, 于是得到定理结论.

现在假设 V 是黎曼半柱面. 则由 $\gamma_{j(i)}\subset H$ 可知, 存在序列 $s_k\to\infty$, 使得对所有与 i 相比充分大的 k, $d_{V\setminus H}(\sigma(s_k),\tau(t_{j(i)}))\geqslant d(\sigma(s_k),\tau(t_{j(i)}))=d_H(\sigma(s_k),\tau(t_{j(i)}))$. 于是 $F_\sigma^{V\setminus H}(\tau(t_{j(i)}))\leqslant F_\sigma(\tau(t_{j(i)}))$. 所以有

$$\lim_{i\to\infty}\frac{F_\sigma(\tau(t_{j(i)}))}{t_{j(i)}}\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{F_\sigma^{V\setminus H}(\tau(t_{j(i)}))}{t_{j(i)}}=\cos\min\{\lambda_\infty(V\setminus H),\pi\}. \tag{3.8.3}$$

由 (3.8.2) 式和 (3.8.3) 式可知 $d_\infty(\sigma(\infty),\tau(\infty))=\lambda_\infty(H)\leqslant\min\{\lambda_\infty(V\setminus H),\pi\}$. 因此有

$$\lim_{i\to\infty}\frac{F_\sigma(\tau(t_{j(i)}))}{t_{j(i)}}=\cos d_\infty(\sigma(\infty),\tau(\infty)),$$

$$d_\infty(\sigma(\infty),\tau(\infty))\leqslant\pi.$$

由序列 $\{t_i\}$ 的任意性证得定理的结论. 证毕.

定理 3.8.4 设 σ 是 M 中的射线, 序列 $p_i \in M$, $i = 0, 1, \cdots$ 趋向于点 $p_\infty \in M(\infty)$. 若 p_∞ 含有 $M(\infty)$ 中具有有限 d_∞- 直径的邻域, 则

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_\sigma(p_i)}{d(p_0, p_i)} = \cos\min\{d(p_\infty, \sigma(\infty)), \pi\}.$$

证明 设 C 是 M 的柱心. 由假设条件, 存在黎曼半平面 $H = D(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_C$, 使得 $\lambda_\infty(H) < +\infty$, 且 $H(\infty)$ 是 p_∞ 的邻域. 设 $\tau \in \mathcal{R}_C$ 满足 $\tau(\infty) = p_\infty$, τ 包含于 H 中. 记 $t_i := d(p_i, C)$, 则有

$$\left|\frac{F_\sigma(p_i)}{t_i} - \frac{F_\sigma(\tau(t_i))}{t_i}\right| \leqslant \frac{d(p_i, \tau(t_i))}{t_i},$$

对 H 应用定理 3.7.1 可知当 $i \to 0$ 时上述关系式的右边趋向于 0. 因而由定理 3.8.3 可得结论. 证毕.

定义 3.8.3 (度量空间的半径) 设 (X, d) 是度量空间, x 是 X 中任一点. 带基点的空间 (X, x, d) 的半径 $\mathrm{rad}(X, x, d)$ 定义为

$$\mathrm{rad}(X, x, d) := \sup_{y\in X} d(x, y).$$

度量空间 (X, d) 的半径 $\mathrm{rad}(X, d)$ 定义为

$$\mathrm{rad}(X, d) := \inf_{x\in X} \mathrm{rad}(X, x, d).$$

容易证明若 (X, d) 是内蕴度量空间, 则

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(X, d) \leqslant \mathrm{rad}(X, x, d) \leqslant \mathrm{diam}(X, d).$$

注 3.8.3 (1) 若 M 具有多于一个端, 则

$$\mathrm{diam}(M(\infty), d_\infty) = \mathrm{rad}(M(\infty), d_\infty) = +\infty.$$

(2) 若 $\partial M(\infty) = \varnothing$, 则 $\mathrm{diam}(M(\infty), d_\infty) = \mathrm{rad}(M(\infty), d_\infty)$.
(3) 若 $\partial M(\infty) \neq \varnothing$, 则 $\mathrm{diam}(M(\infty), d_\infty) = 2\mathrm{rad}(M(\infty), d_\infty)$.
定理 3.8.4 可以用来证明:

定理 3.8.5 对于 M 中的任意射线 σ:
(1) 若 $\mathrm{rad}(M(\infty), \sigma(\infty), d_\infty) < \pi/2$, 则 F_σ 是穷举函数.
(2) 若 $\mathrm{rad}(M(\infty), \sigma(\infty), d_\infty) > \pi/2$, 则 F_σ 非穷举函数.

练习 3.8.1 证明定理 3.8.5.

引理 3.8.4 设 H, σ, τ 如同注 3.8.1 后面的定义. 假设 $\lambda_\infty(H)=\pi/2$, σ,τ 为测地线, 且存在紧致子集 $K\subset H$, 使得在 $H\setminus K$ 上 $G\geqslant 0$. 则存在充分大的 $T\geqslant 0$, 使得 $F_\sigma(\tau(t))$ 在 $t\in[T,+\infty)$ 中单调不增.

证明 由 $\lambda_\infty(H)=\pi/2$ 可知 $\{\gamma_t\}$ 发散. 存在充分大的 $T\geqslant 0$, 使得 $K\subset D_T$. 则在 $t\geqslant T$ 上 $c(D_t)$ 单调不减, 且当 $t\to+\infty$ 时趋向于 $c(H)$. 我们有 $0=\lambda_\infty(D_t)=\pi-\lambda(\partial D_t)-c(D_t)$, $\lambda(\partial D_t)=\lambda(\partial H)+\theta_t$. 于是 θ_t 在 $t\geqslant T$ 上单调不增, 且当 $t\to+\infty$ 时它趋向于 $\lambda_\infty(H)=\pi/2$. 特别地对任意 $t\geqslant T$, 有 $\theta_t\geqslant\pi/2$. 由引理 3.8.2 便完成了证明. 证毕.

定理 3.8.6 假设对 M 的柱心 C, 在 $M\setminus C$ 上有 $G\geqslant 0$, $\lambda(\partial M\setminus C)\geqslant 0$. 设从 C 出发的射线 σ,τ 满足 $d_\infty(\sigma(\infty),\tau(\infty))=\pi/2$. 则存在 $T\geqslant 0$, 使得在 $t\geqslant T$ 上 $F_\sigma(\tau(t))$ 单调不增. 特别地, 若对 M 中的射线 σ, $\mathrm{rad}(M(\infty),\sigma(\infty),d_\infty)=\pi/2$, 则 F_σ 是一个非穷举函数.

证明 由假设条件知, 对某个足够大的 $a\geqslant 0$, $\sigma\mid_{[a,+\infty)}$ 和 $\tau\mid_{[a,+\infty)}$ 都是测地线, 且当 $t\to+\infty$ 时, $\sigma(t)$ 和 $\tau(t)$ 趋向于共同的端. 记 V 为与这个端相对应的 $\overline{M\setminus C}$ 的连通分支. 不失一般性, 假设 $D(\sigma,\tau):=H$ 有定义 (当 V 为黎曼半平面) . 由于 M 中不存在直线 γ 满足 $\gamma(-\infty)=\sigma(\infty)$, $\gamma(\infty)=\tau(\infty)$, 可以得到 (见定理 3.8.3 的证明) 对所有充分大的 $t\geqslant 0$,

$$F_\sigma(\tau(t))=\begin{cases}F_\sigma^H(\tau(t)), & V\text{ 为黎曼半平面;}\\ \min\{F_\sigma^H(\tau(t)),F_\sigma^{V\setminus H}(\tau(t))\}, & V\text{ 为黎曼半柱面.}\end{cases}$$

由引理 3.8.4 便得定理的结论. 证毕.

作为定理 3.8.5 和定理 3.8.6 的直接推论, 我们有:

定理 3.8.7 假设存在 M 的紧致子集 K, 使得在 $M\setminus K$ 上 $G\geqslant 0$, 且 $\lambda(\partial H\setminus K)\geqslant 0$. 则以下结论成立:

(1) $\mathrm{diam}(M(\infty),d_\infty)<\pi/2$ 当且仅当 M 上的任意 Busemann 函数都是穷举函数.

(2) $\mathrm{rad}(M(\infty),d_\infty)\geqslant\pi/2$ 当且仅当 M 上的任意 Busemann 函数都非穷举函数.

(3) 以下的 (a)~(c) 相互等价:

(a) $\mathrm{diam}(M(\infty),d_\infty)\geqslant\pi/2$ 且 $\mathrm{rad}(M(\infty),d_\infty)<\pi/2$.

(b) M 容许穷举 Busemann 函数和非穷举 Busemann 函数.

(c) $(M(\infty),d_\infty)$ 等距于长度为 l 的紧致弧, 其中 $\pi/2\leqslant l<\pi$.

第四章 完备开曲面的割迹

Poincaré ([68]) 介绍了割迹的定义. 他最早研究了完备单连通的实解析 2 维黎曼流形上一点处割迹的结构. Myers ([60],[61]) 确定了 2 维球面上一点处割迹的结构. Whitehead ([107]) 证明了完备 2 维黎曼流形上一点处的割迹具有局部树的结构. 本章我们将确定完备 2 维黎曼流形割迹和 Jordan 曲线距离圆的结构, 并将证明割迹的距离函数的绝对连续性.

§1 预备知识

本章中 (M,g) 表示完备连通的光滑无边 2 维黎曼流形. 设 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 是单位速度测地线, 由定理 1.7.3, 任意测地线段 $\gamma:[0,a)\to M$ 可以延拓到 $[0,\infty)$. 若对某个正数 b, $\gamma|_{[0,b]}$ 不是连接其端点的极小测地线, 设 t_0 是使得 $\gamma|_{[0,t]}$ 为极小的最大正数 t. 由引理 1.2.2, 总存在这样的正数 t_0. 点 $\gamma(t_0)$ 称为 $\gamma(0)$ 沿测地线 γ 的割点. 对 M 上的每个点 p, 记 $C(p)$ 为沿测地线从 p 散发出的所有割点的集合.

记 $\mathcal{C}$ 为 M 中的光滑 Jordan 曲线, 它由以弧长 s 为参数的光滑映射 $z_0:[0,L_0]\to M$ 参数表示. 为简便起见, 设映射 z_0 和 s 的其他函数是以 L_0 为周期的周期函数. 本章中我们将假设 $\mathcal{C}$ 具有周期为 L_0 的单位正规光滑场 N. 例如, 若曲线在一个凸球 $B(p,\mathrm{conv}(p))$ 中, 则它具有这样的正规场. 映射 $z:\mathbb{R}\times[0,L_0]\to M$ 定义为

$$z(t,s):=\exp_{z_0(s)}tN_s.$$

定义 4.1.1 记 $\pi:\mathcal{NC}\to\mathcal{C}$ 为具有投影 π 的 $\mathcal{C}$ 的法丛.

对于每个 $s\in[0,L_0]$, 设测地线 $\gamma_s:\mathbb{R}\to M$ 满足 $\gamma_s(t)=z(t,s)$, 且 $e_s(t)$ 是沿 γ_s 的单位平行向量场, $e_s(0)=(\partial z/\partial s)(0,s)$. 由于法丛 $\mathcal{NC}$ 上的正规指数映射在零截面附近为微分同胚, 因此若 $|t|$ 充分小, 则每个 γ_s 都是从 $\gamma_s(t)$ 到 $\mathcal{C}$ 的极小测地线. 在这种情况下, 由 Gauss 引理 1.2.1 可知映射 z 给出了一个坐标系 (t,s), 在 $\mathcal{C}$ 附近满足 $g(\partial z/\partial t,\partial z/\partial t)=1$, 且 $g(\partial z/\partial t,\partial z/\partial s)=0$. 对每个 s, 设 $Y_s(t)$ 是沿 γ_s 的 Jacobi 场, $Y_s(0)=e_s(0)$, $g(Y_s(t),\gamma_s'(t))=0$. 记

$$f(t,s):=g(Y_s(t),e_s(t)),$$

则有 $f(0,s)=1$, $f_t(0,s)=k(s)$, 且 $g(\partial z/\partial s,\partial z/\partial s)=f^2(t,s)$. 其中 $k(s)$ 为 $\mathcal{C}$ 在 $z_0(s)$ 处的测地曲率, 且 $f_t=\partial f/\partial t$. 由于 Y_s 是 Jacobi 场, 故

$$f_{tt}(t,s)+G(z(t,s))f(t,s)=0,$$

其中 $f_{tt}=(\partial/\partial t)f_t$, G 为 M 上的 Gauss 曲率.

练习 4.1.1 证明对所有的 s, $f_t(0,s)=k(s)$.

设 $P(s)$ (或 $N(s)$) 为满足 $f(s,t)=0$ 的最小正数 t (或最大负数 t), 或者若不存在零点, 记 $P(s)=+\infty$ (或 $N(s)=-\infty$). 若 $P(s_0)<+\infty$ (或 $N(s_0)>-\infty$) 则 P (或 N) 在 s_0 处光滑, 称 $z(P(s_0),s_0)$ (或 $z(N(s_0),s_0)$) 为沿 γ_{s_0} 的 $\mathcal{C}$ 的第一正 (或负) 焦点. 若对所有的 $t\in[0,a]$, 单位速度测地线 $\gamma:[0,a]\to M$ 满足 $d(\gamma(t),\mathcal{C})=t$, 则称其为 $\mathcal{C}$-线段的 (或从 $\gamma(a)$ 到 $\mathcal{C}$ 的极小测地线), 由最短路径原理 (引理 1.8.1), 任意两条 $\mathcal{C}$-线段不在内部相交, 由第一变分公式 (定理 1.5.1), 任何一条 $\mathcal{C}$-线段 γ 都从 $\mathcal{C}$ 正交发出. 因此每条 $\mathcal{C}$-线段都是某个 γ_s 的子弧. 所有 $\mathcal{C}$-线段的终点的集合称为 $\mathcal{C}$ 的割迹, 记为 $C(\mathcal{C})$.

本章我们需要测度论的工具来证明一些定理, 对这部分理论不熟的读者可以查阅相关书籍, 如 [106].

设 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是具有有界变分的连续函数, 则这一函数定义了 Lebesgue-Stieltjes 测度 Λ_h, 即对 $[a,b]$ 的每个子区间 $(x,y]$, $\Lambda_h((x,y])$ 等于 h 在 $[x,y]$ 上的全变分. $[a,b]$ 上的任何 Borel 子集 B 是 Λ_h-可测的, 测度 $\Lambda_h(B)$ 称为 h 在 B 上的变分.

引理 4.1.1 (Banach [8]) 设 h 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $n(t)$ 为 $h^{-1}(t)$ 中元素的个数, 则 h 具有有界变分, 当且仅当 $n(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为 Lebesgue 可积, 且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}n(t)\mathrm{d}t=V(h),\tag{4.1.1}$$

其中 $V(h)=\Lambda_h(a,b]$. 特别地, 若 h 具有有界变分, 则 $n(t)$ 对于几乎所有的 t 为有限的.

证明 对每个正整数 p, 定义 2^p+1 个数 $a_j(j=0,1,2,\cdots,2^p)$ 为

$$a_j := a + j(b-a)2^{-p}.$$

对每个正整数 $j \leqslant 2^p$, 定义区间 I_j 为

$$I_j := \begin{cases} [a_{j-1}, a_j), & 若\ j < 2^p; \\ [a_{j-1}, a_j], & 若\ j = 2^p. \end{cases}$$

设 $L_j(t), j=1,2,\cdots,2^p$ 为 $h(I_j)$ 的示性函数, 即若 $t \in h(I_j)$, 则 $L_j(t)=1$; 否则 $L_j(t)=0$. 定义函数 $n_p(t)$ 为

$$n_p(t) = \sum_{j=1}^{2^p} L_j(t). \tag{4.1.2}$$

于是由构造知, 若 $p \geqslant q$, 则 $n_p(t) \geqslant n_q(t)$, 因此可得可测函数

$$\overline{n}(t) := \lim_{p\to\infty} n_p(t). \tag{4.1.3}$$

由于对每个正整数 p 有 $n(t) \geqslant n_p(t)$, 故

$$n(t) \geqslant \overline{n}(t). \tag{4.1.4}$$

若对某个整数 m 和某个实数 t, 有 $n(t) \geqslant m$, 则对任意充分大的整数 p, $n_p(t) \geqslant m$. 因此, 若对某个 t, $n(t) \geqslant m$, 则 $\overline{n}(t) \geqslant m$. 由 (4.1.4) 和这一性质可知对任意的 t, $n(t) = \overline{n}(t)$, 由 $L_j(t)$ 的构造可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_j(t)\mathrm{d}t = M_j - m_j, \tag{4.1.5}$$

其中 $M_j := \sup h|_{I_j}$, $m_j := \inf h|_{I_j}$. 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n_p(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{2^p}(M_j - m_j). \tag{4.1.6}$$

注意到 (4.1.6) 的右边不大于 $V(h)$. 由 (4.1.6) 可得对任意正整数 p,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n_p(t)\mathrm{d}t \leqslant V(h). \tag{4.1.7}$$

由 Fatou 引理和 (4.1.7) 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(t)\mathrm{d}t \leqslant V(h). \tag{4.1.8}$$

若 h 具有有界变分, 则由 (4.1.8) 知 $n(t)$ 为 Lebesgue 可积的. 反之, 若 $n(t)$ 为 Lebesgue 可积, 则由 (4.1.6) 知 h 具有有界变分, 这是因为

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{j=1}^{2^p}(M_j - m_j) = V(h). \tag{4.1.9}$$

证毕.

推论 4.1.1 设 h 连续且有有界变分, 则

$$\Lambda_h(h^{-1}(-\infty, r)) = \Lambda_h(h^{-1}(-\infty, r]) = \int_{-\infty}^{r} n(t)\mathrm{d}t. \tag{4.1.10}$$

特别地, 函数 $\mathbb{R} \ni r \mapsto \Lambda_f(f^{-1}(-\infty, r])$ 在每个紧致区间上绝对连续.

证明 假设 r 满足 $n(r) < \infty$. 选取有限个不相交的区间 I_j, 使得

$$h^{-1}(-\infty, r] = I_1 \bigcup \cdots \bigcup I_N.$$

定义函数 h_r 为

$$h_r(t) := \min\{h(t), r\},$$

则 h_r 连续且具有有限变分. 由于 Λ_h 和 Λ_{h_r} 为测度, 故有

$$\Lambda_h(h^{-1}(-\infty, r)) = \sum_j \Lambda_h(I_j) = \sum_j \Lambda_{h_r}(I_j) = \Lambda_{h_r}\left(\bigcup_j I_j\right), \tag{4.1.11}$$

其中 Λ_{h_r} 是由 h_r 定义的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 但是 $\Lambda_{h_r}(\bigcup_j I_j)$ 等于 h_r 的全变分, 因而由引理 4.1.1 得

$$\Lambda_{h_r}\left(\bigcup_j I_j\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_r(t)\mathrm{d}t, \tag{4.1.12}$$

其中 $n_r(t)$ 是 $h_r^{-1}(t)$ 中元素的个数. 显然对任意 $t > r$, $n_r(t) = 0$, 且对任意 $t \leqslant r$, $n_r(t) = n(t)$. 由 (4.1.11) 和 (4.1.12) 知, 对每个满足 $n(r) < \infty$ 的 r, 有 (4.1.10) 成立. 通过选取满足对每个 i, $n(r_i) < +\infty$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = r$ 的无限序列 $\{r_i\}$, 容易证明余下的问题. 由于 $h^{-1}(-\infty, r)$ 是不相交开区间的可数并, 容易证明 $\Lambda_h(h^{-1}(-\infty, r)) = \int_{-\infty}^{r} n(t)\mathrm{d}t$. 证毕.

练习 4.1.2 给出推论 4.1.1 的完整证明.

以下引理是 Sard 引理的特殊情况.

引理 4.1.2 (Sard) 若 h 是 (a,b) 上的 C^1-函数, 则 $h(\{t\in(a,b)|h'(t)=0\})$ 的 Lebesgue 测度为零.

练习 4.1.3 证明以上引理.

注 4.1.1 引理对于连续函数成立 (参见[87]), 即对于任意连续函数 h, 集合 $h(\{t\in(a,b);h'(t)$ 存在且等于 $0\})$ 是 Lebesgue 零测集.

引理 4.1.3 设 $\{I_n\}$ 是 $[0,1]$ 的互不相交闭子区间的集合, 则存在连续单调不减函数 $f:[0,1]\to[0,1]$, 使得 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 并且 $f(t_1)=f(t_2)$ 当且仅当 t_1 和 t_2 在同一个区间 I_n 中.

证明 具有以上性质的函数 f 可采用与 Lebesgue-Cantor 函数 ([106]) 相同的方法进行构造. 由于技术上的原因, 我们对 $\{I_n\}$ 添加一个可数的闭区间族 $\{J_k\}$. 对于 $(0,1)\setminus\overline{\bigcup_n I_n}$ 的每个分支 (a,b), 其中 $\overline{\bigcup_n I_n}$ 为 $\bigcup_n I_n$ 的闭包. 若 $a\notin\bigcup_n I_n$ $\left(\text{或 } b\notin\bigcup_n I_n\right)$, 则对 $\{I_n\}$ 添加闭区间 $[a,(2a+b)/3]$ (或 $[(a+2b)/3,b]$); 否则不添加. 由此可以得到互不相交可数的闭区间族 $\{I_n,\ J_k;\ n,\ k\}$. 首先, 如下重新标记 I_n, J_k, 从 $\{I_n,\ J_k\}$ 中选取闭区间 $J(0,0)$ 和 $J(0,1)$, 使得 $0\in J(0,0)$, $1\in J(0,1)$. 若这些区间不存在, 则取为空集. 现从 $\{I_n,J_k\}$ 中取区间 $J(1,1)$, 使得 $J(1,1)\subset[0,1]\setminus(J(0,1)\bigcup J(0,0))$, $|J(1,1)|=\max\{|I_n|,\ |J_k|;\ I_n\bigcup J_k\subset[0,1]\setminus(J(0,1)\bigcup J(0,0))\}$, 其中 $|J(1,1)|$, $|I_n|$, $|J_k|$ 分别为区间长度. 假设对某个正整数 n, 已定义闭区间 $J(n,j)$, $j=1,2,\cdots,2^{n-1}$. 则对

$$[0,1]\Big\backslash\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n;\ 1\leqslant j\leqslant 2^{n-1}} J(k,j)\bigcup J(0,0)\bigcup J(0,1)$$

的每个分支 J, 从 $\{I_n,J_k\}$ 中选取区间 I, 使得 $I\subset J$, 并且

$$|I|=\max\{|I_n|,|J_k|;I_n\subset J,J_k\subset J\}.$$

若对某个 J 不存在这样的 I, 则取空集. 我们已经选取闭区间 $J(n+1,j)$, $1\leqslant j\leqslant 2^n$, 其中 $\max J(n+1,j)<\min J(n+1,j+1)$. 由其构造可知, 对每个正整数 n, 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,2^{n-1}\}$ 和 $j\in\{1,2,\cdots,2^n\}$ 有

$$|J(n,i)|\geqslant|J(n+1,j)|.$$

因此

$$\{I_n,J_k\}=\{J(n,i);n=1,2,\cdots,1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}\}\bigcup\{J(0,0),J(0,1)\}.$$

对每个正整数 n, 设 f_n 为 $[0,1]$ 上的单调不减连续函数, 满足对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $j = 1,2,\cdots,2^{k-1}$,

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 1, \quad f_n|_{J(0,0)} = 0,$$

$$f_n|_{J(0,1)} = 1, \quad f_n|_{J(k,j)} = \frac{2j-1}{2^k},$$

并且在

$$[0,1] \Big\backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} J(k,j) \bigcup J(0,0) \bigcup J(0,1) \right)$$

的每个分支上是线性的. 显然每个 f_n 单调不减, 且 $t_1, t_2 \in [0,1]$ 满足 $f_n(t_1) = f_n(t_2)$ 当且仅当 t_1, t_2 包含于同一个 $J(k,j)$ 中.

由构造可知对任意正整数 $m > n$, 在 $[0,1]$ 上有

$$| f_n(t) - f_m(t) | \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

因此存在唯一的极限函数 $\tilde{f}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. 由一致收敛性可知函数 $\tilde{f}$ 单调不减且连续. 若 (a_n, b_n), $k = 1,2,\cdots$ 为 $(0,1) \setminus \overline{\bigcup_n I_n}$ 的所有分支, 满足 $a_k \notin \bigcup_n I_n$ 或 $b_k \notin \bigcup_n I_n$. 设 f 为 $[0,1]$ 上的单调不减连续函数, 满足在 $[0,1] \setminus \bigcup(a_k, b_k)$ 上 $f = \tilde{f}$, 且在每个闭区间 $[a_k, b_k]$ 上为线性的, 且 $f(a_k) = \tilde{f}(a_k)$, $f(b_k) = \tilde{f}(b_k)$. 容易验证 f 具有引理要求的性质. 证毕.

定义 4.1.2 从开区间或闭区间到 M 的连续单射称为 Jordan 弧; 从圆到 M 的连续单射称为 Jordan 曲线.

命题 4.1.1 对任意连续曲线 $c : [0,1] \longrightarrow M$, 若 $c(0) \neq c(1)$, 则它包含连接 $c(0)$ 和 $c(1)$ 的 Jordan 子弧. 见图 4.1.1.

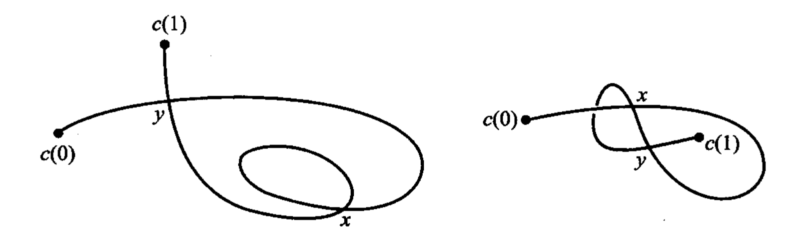


图 4.1.1 左边: $I_1 = I_y \supset I_x$; 右边: $I_1 = I_x$, $I_y \not\subset [0,1] \setminus I_1$.

证明 对 $c([0,1])$ 中的每个多重点 x, 设 I_x 为 $[0,1]$ 的闭子区间 $[\min c^{-1}(x), \max c^{-1}(x)]$. 由于 c 连续, 可以从区间 I_x 中选取具有最大长度的闭子区间 $I_1 :=$

$[a_1, b_1]$. 归纳地从 I_x 中选取闭区间 $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$ 具有最大长度, 并且多重点 $x \in c\left([0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)$, 这确定了 $[0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 中的不同元素 a, b, 使得 $c(a) = c(b) = x$. 由此得到互不相交闭区间序列 $\{I_n\}$, 满足对每个 $I_n = [a_n, b_n]$, $c(a_n) = c(b_n)$, 并且若两个不同元素 $x, y \in [0,1] \setminus \bigcup_n \mathrm{int}\, I_n$ 满足 $c(x) = c(y)$, 则 x, y 是同一个区间 I_n 的两个端点. 由引理 4.1.3 知, 存在 $[0,1]$ 上的单调不减连续函数 f, 使得 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 且 $f(t_1) = f(t_2)$ 当且仅当 t_1, t_2 在同一个区间 I_n 中. 故 $[0,1]$ 上的函数 $\bar{c}(u) := c(\max f^{-1}(u))$ 是连接 $c(0)$ 和 $c(1)$ 的连续 Jordan 弧. 证毕.

§2 割迹的拓扑结构

容易看出 $M \setminus \mathcal{C}$ 至多有两个连通分支. 由于可以进行类似的讨论, 我们不再深入讨论 $M \setminus \mathcal{C}$ 只有一个分支的情形. 这种情况的细节在 [86] 中给出. 这里我们假设 $M \setminus \mathcal{C}$ 具有两个分支, 因而 $\mathcal{C}$ 具有一个以 L_0 为周期的单位法向量场. 注意到对于大多数的定理、性质和引理, 若非此情形, 则转化为 $M \setminus \mathcal{C}$ 具有两个分支的情形. 实际上, 对于一个充分小的正数 ϵ, $\mathcal{C}$ 的 ϵ-球法丛 $\mathcal{N}_\epsilon \mathcal{C}$ 由指数映射微分同胚地映射到一条光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}_\epsilon$ 上. 容易验证 $\mathcal{C}_\epsilon$ 围成一个相对紧的区域, 并且对任意 $t > \epsilon$,

$$S(\mathcal{C}, t+\epsilon) = S(\mathcal{C}_\epsilon, t), \quad B(\mathcal{C}, t+\epsilon) = B(\mathcal{C}_\epsilon, t),$$

其中

$$B(\mathcal{C}, t) = \{q \in M; d(q, \mathcal{C}) < t\}.$$

令

$$\rho(s) := \sup\{t; d(\gamma_s(t), \mathcal{C}) = t\},$$

$$v(s) := \inf\{t < 0; d(\gamma_s(t), \mathcal{C}) = -t\}.$$

如 § 4.1 所述, 这两个函数是严格正的. 若 $\rho(s)$ (或 $v(s)$) 有限, 则 $z(\rho(s), s)$ (或 $z(v(s), s)$) 称为 $\mathcal{C}$ 的割点. 因此 $\gamma_s|_{[0,\rho(s)]}$ (或 $\gamma_s|_{[v(s),0]}$) 是包含于 $\gamma_s|_{[0,\infty)}$ (或 $\gamma_s|_{(-\infty,0]}$) 中的极大 $\mathcal{C}$-线段. 函数 ρ, v 称为割迹的距离函数. 由注 1.8.1 可得:

引理 4.2.1 两条不同的 $\mathcal{C}$-线段在其内部不相交.

从现在开始我们只讨论函数 ρ, 但相同的结论对 v 同样成立.

命题 4.2.1 函数 $\rho : [0, L_0] \longrightarrow (0, \infty]$ 连续.

证明 设 s_0 是 $[0, L_0]$ 中的任意实数, $\{s_n\}$ 是收敛于 s_0 的序列. 由于任意 $\mathcal{C}$-线段序列的极限测地线本身也是 $\mathcal{C}$-线段, 故有

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(s_n) \leqslant \rho(s_0). \tag{4.2.1}$$

假设对某个常数 b, $\rho(s_0) > b$, 我们将证明 $\liminf\limits_{n\to\infty} \rho(s_n) \geqslant b$. 这个性质说明

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(s_n) \geqslant \rho(s_0). \tag{4.2.2}$$

因此由不等式 (4.2.1) 和 (4.2.2) 可得命题结论. 由以上的假设, $\gamma_{s_0}|_{[0,b]}$ 是 $\mathcal{C}$-线段, $\gamma_{s_0}(b)$ 不是 $\mathcal{C}$ 沿 γ_{s_0} 的焦点, 因此 $\mathcal{NC}$ 上的正规指数映射将 $b\dot\gamma_{s_0}(0)$ 的邻域 U 微分同胚地映射到 $\gamma_{s_0}(b)$ 的邻域 V. 由引理 4.2.1 知, 若 x 是一个充分接近 $\gamma_{s_0}(b)$ 的点, 则对任一从 x 到 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{C}$-线段 γ_s, $d(x,\mathcal{C})\dot\gamma_s(0)$ 是 U 的元素. 因此对充分大的 n, 有 $\gamma_{s_n}|_{[0,b]}$ 是 $\mathcal{C}$-线段, 得到 (4.2.2). 证毕.

由于集合 $\{s \in [0, L_0]; \rho(s) < +\infty\}$ 是可数个区间的并集, 由以上的命题知, 割迹是可数个连续曲线的并集. 若割迹包含 Jordan 曲线 σ, 而 σ 围成一个区域, 则我们可以得到一条从这一区域中的一点出发的 $\mathcal{C}$-线段, 因而这一线段在 σ 内部与一个割点相交, 这是一个矛盾. 因此有

引理 4.2.2 割迹不包含凸邻域中的 Jordan 曲线. 进而, 若 M 单连通, 则割迹不包含 Jordan 曲线.

对于 $\mathcal{C}$ 的每个割点 x, 记 $\Gamma(x)$ 为所有从 x 到 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{C}$-线段的集合, 以下在一点 $x \in C(\mathcal{C})$ 处扇形的定义对研究割迹的结构非常重要.

定义 4.2.1 选取充分小的正数 ϵ ($< d(x,\mathcal{C})$), 使得 $B(x,\epsilon)$ 是一个凸球, $B(x,\epsilon) \setminus \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma(x)} \gamma(0,\epsilon)$ 的每个分支称为 x 处的一个 ϵ-扇形 (或简称扇形).

每个 $x \in C(\mathcal{C})$ 处的扇形 $\Sigma_\epsilon(x)$ 具有以下四个性质:

S1 若 $y \in \Sigma_\epsilon(x)$, 则连接 y 和 x 的唯一极小测地线在 $\Sigma_\epsilon(x)\bigcup\{x\}$ 中. 若 $\Sigma_\epsilon(x)$ 在 x 处的内角小于 π, 则每条连接 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中两点的极小测地线在 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中.

S2 $\Gamma(x)$ 中不存在通过 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中的点的元素.

S3 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中存在收敛于 x 的 $\mathcal{C}$ 的割点的序列.

S4 若 $\{q_j\}$ 是 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中收敛于 x 的点的序列, 则 $\Gamma(q_j)$ 中 $\mathcal{C}$-线段的每个收敛子列具有极限 γ 或 σ, 其中 $\gamma, \sigma \in \Gamma(x)$ 是测地线, 它们的子弧, 以及 $S(x,\epsilon)$ 中以 $\gamma(d(\mathcal{C},x)-\epsilon)$ 和 $\sigma(d(\mathcal{C},x)-\epsilon)$ 为端点的子弧构成 $\Sigma_\epsilon(x)$ 的边界.

若没有 S3, 上面的性质是平凡的. 假设 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中在 x 附近没有割点. 设 $S(x,t)$ 为 x 处半径为 t 的测地圆, 则对每个 $t < \epsilon$, 弧 $S(x,t)\bigcap\Sigma_\epsilon(x)$ 被 $\mathcal{C}$-线段覆盖. 若 $t_1 < t_2 < \epsilon$, 则每个通过 $S(x,t_1)\bigcap\Sigma_\epsilon(x)$ 的 $\mathcal{C}$-线段是某个通过

$S(x,t_2)\bigcap\Sigma_\epsilon(x)$ 的 $\mathcal{C}$-线段的延拓. 因此得到一个通过 $\Sigma_\epsilon(x)$ 的 $\Gamma(x)$ 的元素, 这与 S2 矛盾.

引理 4.2.3 对每个 $s\in[0,L_0]$, 成立不等式 $\rho(s)\leqslant P(s)$, 并且若对某个 s_0, $\rho(s_0)=P(s_0)<+\infty$, 则 $P'(s_0)=0$.

证明 不失一般性, 为证明 $\rho(s_0)\leqslant P(s_0)$, 假设 $P(s_0)<\infty$. 因而 $z(P(s_0),s_0)$ 是 $\mathcal{C}$ 的第一焦点. 任取 $l>P(s_0)$, 仿照引理 1.6.1 的证明, 构造 γ_{s_0} 的分段光滑变分 $v:(-\epsilon_0,\epsilon_0)\times[0,l]\longrightarrow M$, 其中 $v(\epsilon,0)=z_0(s_0+\epsilon)$, 使得对充分小的 $\epsilon>0$, $L(\epsilon)<L(0)$, 这里 $L(\epsilon)$ 表示曲线 $s\mapsto v(s,\epsilon)$ 的长度. 至此, 我们对任意的 s 证明了 $\rho(s)\leqslant P(s)$. 假设对某个 $s_0\in(0,L_0]$, $P'(s_0)\neq 0$, 满足 $P(s_0)=\rho(s_0)<+\infty$. 不失一般性, 假设 $P'(s_0)>0$. 任取 $s_1\in[0,s_0)$, 使得在 $[s_1,s_0]$ 上, $P'(s)>0$. 弧 $\{z(P(s),s);s\in[s_1,s_0]\}$ 的长度等于

$$\int_{s_1}^{s_0}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}z(P(s),s)\right\|\mathrm{d}s=P(s_0)-P(s_1).$$

因此, 一方面, 由距离函数的定义有

$$d(z(P(s_1),s_1),z(P(s_0),s_0))\leqslant P(s_0)-P(s_1), \tag{4.2.3}$$

$$d(z(P(s_1),s_1),\mathcal{C})\leqslant L(\gamma_{s_1}|_{[0,P(s_1)]})=P(s_1).$$

另一方面, 由三角不等式得

$$\begin{aligned}&d(z(P(s_1),s_1),\mathcal{C})+d(z(P(s_1),s_1),z(P(s_0),s_0))\\ \geqslant\ &d(z(P(s_0),s_0),\mathcal{C})=P(s_0).\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

注意到 $P(s_0)=\rho(s_0)$. 由 (4.2.3) 可知 (4.2.4) 中的等号成立, 这说明对任意充分接近 s_0 的 $s_1(<s_0)$, 连接 $\gamma_{s_1}|_{[0,P(s_1)]}$ 和 $\{z(P(s),s);s\in[s_1,s_0]\}$ 的弧是从 $z(P(s_0),s_0)$ 出发的 $\mathcal{C}$-线段. 这与假设 $P'(s_0)\neq 0$ 矛盾. 证毕.

若 $\mathcal{C}$ 的一个割点恰好为两条 $\mathcal{C}$-线段的端点, 且不是其中任一条的第一焦点, 则称此割点为正规的. 若 $\mathcal{C}$ 的一个割点不是正规的, 则称其为非正规的. 一个非正规割点 x 称为完全非退化的, 当且仅当 x 不是 $\mathcal{C}$ 沿任何 $\mathcal{C}$-线段的第一焦点. 一个非正规割点称为退化的, 当且仅当它不是完全非退化的. 由引理 4.2.3, 4.2.4 和命题 4.2.2, 4.2.3 可以证明, 所有正规割点的集合是开的, 并且在相对拓扑下是稠密的.

引理 4.2.4 集合 $F:=\{s\in[0,L_0];\rho(s)<P(s)$ 且 $z(\rho(s),s)$ 是非退化割点$\}$ 的 Lebesgue 测度等于零.

证明 取 $s_0 \in F$, 记 $p = z(\rho(s_0), s_0)$. 设 $\Sigma_\epsilon^-(p)$ 和 $\Sigma_\epsilon^+(p)$ 是 p 点的两个扇形, 它们具有公共边界 $\gamma_{s_0}[\rho(s_0)-\epsilon, \rho(s_0)]$; 见图 4.2.1. 由于 p 不是沿 γ_{s_0} 的 C 的焦点, 故存在 $\rho(s_0)\dot{\gamma}_{s_0}(0)$ 在 $\mathcal{N}C$ 中的邻域 V, 和 p 在 M 中的邻域 U, 使得正规指数映射在 V 上的限制 $\exp_V$ 是 V 到 U 的微分同胚. 设 $s_+ \in [0, L_0]$, 使得 $\gamma_{s_+}[\rho(s_0)-\epsilon, \rho(s_0)]$ 是 $\Sigma_\epsilon^+(p)$ 的不同于 $\gamma_{s_0}[\rho(s_0)-\epsilon, \rho(s_0)]$ 的边界, 假设 $P(s_+) = \rho(s_+)$, 选取正数 ϵ_1, 使得对所有 $s \in [s_+ - \epsilon_1, s_+ + \epsilon_1]$, U 包含 $z(\rho(s), s)$ 和 $z(P(s), s)$. 不失一般性, 可以假设 $\{z(\rho(s), s); s \in [s_0, s_0+\epsilon_1]\}$ 是 $\Sigma_\epsilon^+(p)$ 中的曲线, 因而曲线 $\{z(\rho(s), s); s \in [s_0 - \epsilon_1, s_0]\}$ 在 $\Sigma_\epsilon^-(p)$ 中. 选取正数 $\delta_1 < \epsilon_1$, 使得若对 $s_1 \in [0, L_0]$ 和 $s \in (s_0, s_0+\delta_1)$ 有 $z(\rho(s_1), s_1) = z(\rho(s), s)$, 则 $s = s_1$ 或 $s_1 \in (s_+ - \epsilon_1, s_+ + \epsilon_1)$. 定义 $(s_+ - \epsilon_1, s_+ + \epsilon_1)$ 上的光滑函数 v:

$$v(s) := z_0^{-1} \circ \pi \circ \exp_V^{-1} z(P(s), s).$$

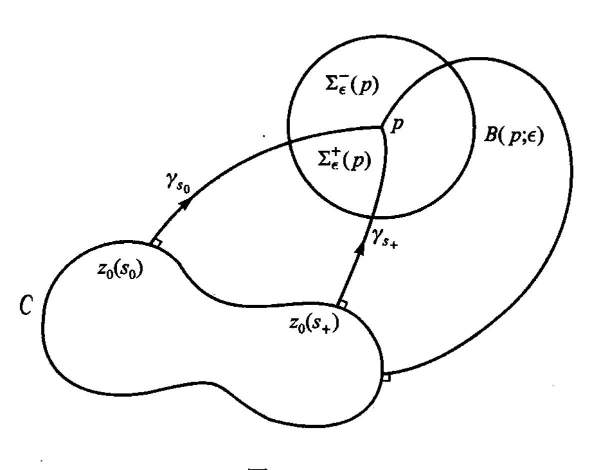


图 4.2.1

这里映射 $z_0 : [0, L_0] \to M$ 为 Jordan 曲线 C. 注意到若 $s \in (s_+ - \epsilon_1, s_+ + \epsilon_1)$ 满足 $P'(s) = 0$, 则 $v'(s) = 0$. 因此 s 是 v 的临界点. 设 $K \subset [s_+ - \epsilon_1, s_+ + \epsilon_1]$ 是 v 的所有临界点的集合. 若 $s \in [s_0, s_0+\delta_1]$ 是 F 的元素, 则存在 $s_1 \in [0, L_0]$, 使得 $z(\rho(s_1), s_1) = z(\rho(s), s)$, $P(s_1) = \rho(s_1)$. 由 δ_1 的选取及引理 4.2.3 知 $P'(s_1) = 0$, $s_1 \in (s_+ - \epsilon_1, s_+ + \epsilon_1)$, 因此可以选取 $s_1 \in K$, 使得 $z(\rho(s), s) = z(\rho(s_1), s_1) = z(P(s_1), s_1)$. 这表明 $(s_0, s_0+\delta_1) \bigcap F$ 完全包含于 $v(K)$ 中. 因此若 $\rho(s_+) = P(s_+)$, 则 $(s_0, s_0+\delta_1) \bigcap F$ 是 Lebesgue 零测集, 因为由引理 4.1.2 知 $v(K)$ 是零测集. 若 $\rho(s_+) < P(s_+)$, 则存在正数 δ, 使得 $(s_0, s_0+\delta) \bigcap F = \varnothing$. 综合以上讨论可知, 存在正数 δ_1, 使得 $(s_0, s_0+\delta_1) \bigcap F$ 是零测集. 相同的讨论应用于 $\Sigma_\epsilon^-(p)$ 可以证明对某个正数 δ_1, $(s_0 - \delta_1, s_0) \bigcap F$ 是零测集, 因此 F 可被可数个零测集覆盖. 因

此 F 也是零测集. 证毕.

命题 4.2.2 设 p 为正规割点, $p = z(\rho(s), s)$ 在 $[0, L_0)$ 中恰有两个解 $s = s_1, s_2$, 则

(1) $\rho(s)$ 在 $s = s_1, s_2$ 的邻域上光滑.

(2) 存在 s_2 邻域中的严格单调的光滑函数 $v(s)$ 满足 $v(s_2) = s_1$, $\rho(v(s)) = \rho(s)$, 且对 s_2 附近的 s, $z(\rho(v(s)), v(s)) = z(\rho(s), s)$.

(3) p 恰有两个扇形, 且在 p 附近 C 的割迹是光滑曲线, 它平分每个扇形在 p 处的内角.

证明 由于 p 不是沿 γ_{s_1} 或 γ_{s_2} 的焦点, 分别存在 p, $\rho(s_1)\dot{\gamma}_{s_1}(0)$ 和 $\rho(s_2)\dot{\gamma}_{s_2}(0)$ 处的邻域 V, U_1 和 U_2, 使得 $\mathcal{N}C$ 上的正规指数映射是 U_i 到 V 的微分同胚, $i = 1, 2$. 设 f 是如下定义的 V 上的光滑函数

$$f(q) := \| \exp_{U_1}^{-1} q \| - \| \exp_{U_2}^{-1} q \|,$$

其中 $\exp_{U_i} : U_i \to V$ 是光滑指数映射在 U_i 上的限制, 则对任意 $w \in T_pM$, 由第一变分公式得方程

$$\mathrm{d}f_p(w) = \langle \dot{\gamma}_{s_1}(\rho(s_1)), w \rangle - \langle \dot{\gamma}_{s_2}(\rho(s_2)), w \rangle. \tag{4.2.5}$$

由于两个向量 $\dot{\gamma}_{s_1}(\rho(s_1))$ 和 $\dot{\gamma}_{s_2}(\rho(s_2))$ 不同, 设 p 不是 f 的临界点, 因此由隐函数定理, $f^{-1}(0)$ 是光滑一维子流形. 设 c 是 $f^{-1}(0)$ 中从 $p = c(0)$ 出发的光滑曲线, 记 $s_i(t) := z_0^{-1} \circ \pi \circ \exp_{U_i}^{-1} c(t)$, $i = 1, 2$. 容易证明若 $|\,t\,|$ 充分小, 则 $\gamma_{s_i(t)}|_{[0, \| \exp_{U_i}^{-1} c(t) \|]}$ 是 C-线段, 且 $c(t)$ 是正规割点. 由 (4.2.5) 容易得到 (3) 中结论. 另一结论也容易证明. 证毕.

由第一变分公式, 在以上命题中, 在 $s = s_1$ (或 $s = s_2$) 处 $\rho'(s) = 0$ 当且仅当两条 C-曲线 γ_{s_1} 和 γ_{s_2} 在 $z(\rho(s_1), s_1) = z(\rho(s_2), s_2)$ 处所成角度为 π.

定义 4.2.2 若两条 C-线段 γ_{s_1} 和 γ_{s_2} 在 $z(\rho(s_1), s_1) = z(\rho(s_2), s_2)$ 处所成角度为 π, 则称 $\gamma_{s_1}|_{[0, 2\rho(s_1)]}$ 为 C-回路.

以下命题的证明与上面的命题类似.

命题 4.2.3 设 p 为完全非退化非正规割点, 则

(1) 只存在 $[0, L_0)$ 中的有限多个 s 值, 记为 n 个; $s = s_1, s_2, \cdots, s_n$ $(n \geqslant 3)$, 使得 $p = z(\rho(s), s)$.

(2) p 恰好有 n 个扇形.

(3) ρ 在所有包含 s_j 的小区间上分段光滑, 并在除 s_j 以外的点光滑.

(4) 在 p 处的每个小扇形处, 割迹是平分扇形内角的光滑曲线.

(5) 在 p 点每个小扇形处的任意割点是正规割点. 特别地, 全非退化割点是孤立的.

由引理 4.2.3, 4.2.4 和命题 4.2.2, 4.2.3 得:

推论 4.2.1 对任意 $0\leqslant a<b<L_0$, 集合 $\{z(\rho(s),s);\ a\leqslant s\leqslant b,\ z(\rho(s),s)$ 是正规的$\}$ 或为空集, 或为 $\{z(\rho(s),s); s\in[a,b]\}$ 中的稠密开集. 进而, 若 $\{z(\rho(s),s);$ $a\leqslant s\leqslant b,\ z(\rho(s),s)$是正规的$\}$ 为空集, 则它由单个元素组成.

拓扑空间 T 定义为树当且仅当 T 中的任意两个点由 T 中唯一的 Jordan 弧连接. 树 T 中的一个点 x 定义为端点当且仅当 $T\backslash x$ 是连通的. 拓扑空间 C 定义为局部树当且仅当对每个 $x\in C$ 和 x 的每个邻域 U, 存在 x 的更小邻域 $T\subset U$, 使之为一个树.

定理 4.2.1 设 M 是完备连通光滑的 2 维黎曼流形, $\mathcal{C}$ 是 M 中的光滑 Jordan 曲线, 则 $\mathcal{C}$ 的割迹是局部树. 进而, 若 M 是单连通的, 则割迹是一个树.

证明 设 x 是 $\mathcal{C}$ 的任意割点. 取 x 处的扇形 $\Sigma_\epsilon(x)$, 由命题 4.2.1 知 ρ 连续, 故集合

$$\{s\in[0,L_0],z(\rho(s),s)=x\}$$

紧致. 因此存在有限多个开区间 $I_j,\ j=1,\cdots,k$, 使得

$$\{s\in[0,L_0],z(\rho(s),s)=x\}\subset\bigcup_{j=1}^{k}I_j,$$

并且每个 c_j 是通过 x 且包含于 $B(x,\epsilon)$ 中的曲线, 其中 $c_j(s):=z(\rho(s),s),s\in I_j$. 由扇形的性质 S3 (见定义 4.2.1), 存在 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中充分接近 x 的割点 y, 因此对某个 $s\in I_j,z(\rho(s),s)=y$. 由于 $c_j(I_j)$ 包含 x, 割点 y 可通过 $\Sigma_\epsilon(x)\bigcap C(\mathcal{C})$ 中的连续曲线与 x 连接. 由推论 4.2.1, 可以假设 y 为一个正规割点, 并且它是 $\Gamma(y)$ 中的 $\mathcal{C}$-线段 σ_y 和 γ_y 的交点. 由于 c_j 平分 y 处的两个扇形, 由扇形性质 S4 知, 当 y 趋近于 x 时, σ_y 和 γ_y 分别收敛到 $\mathcal{C}$-线段 σ 和 γ; 测地线 $\sigma,\gamma\in\Gamma(x)$ 和 $S(x,\epsilon)$ 的子弧一起组成 $\Sigma_\epsilon(x)$ 的边界, 且 $S(x,\epsilon)$ 的端点为 $\sigma(d(\mathcal{C},x)-\epsilon)$ 和 $\gamma(d(\mathcal{C},x)-\epsilon)$.

因此, 若选取 y 充分接近 x, 则四条 $\mathcal{C}$-线段 $\sigma,\gamma,\sigma_y,\gamma_y$ 和 $\mathcal{C}$ 的两条子弧 $\{z_0(s);s\in J_1\}$, $\{z_0(s);s\in J_2\}$ 一起围成圆盘区域 D, 而 D 中包含 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中的任一割点, 这里 J_i 为 $[0,L_0]$ 上的闭子区间, 使得 $\{x,y\}=\{z(\rho(s),s);s\text{是}J_i\text{的端点}\}$. 由于从 D 中的割点 q 出发的 $\mathcal{C}$-线段是某个 γ_s 的子弧, $s\in J_1\bigcup J_2$, 故割点 q 在曲线 c_j 上. 由命题 4.1.1 和引理 4.2.2 知, D 中 (因此 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中) 的任一割点可由 $(\Sigma_\epsilon(x)\bigcup\{x\})\bigcap C(\mathcal{C})$ 中的唯一 Jordan 弧与 x 连接. 这表明 $C(\mathcal{C})$ 是

$(\Sigma_\epsilon(x)\bigcup\{x\})\bigcap\Sigma_{2\epsilon}(y;x)$ 中的树, 其中 $\Sigma_{2\epsilon}(y;x)$ 是 y 处包含 x 的 2ϵ-扇形. 若 x 处 $\Sigma_\epsilon(x)$ 的内角充分小, 则存在 $[0,L_0]$ 的闭子区间 J, 使得 $J\subset\bigcup_{j=1}^{k}I_j$ 且两个 $\mathcal{C}$-线段 σ,γ 以及 C 中 $\{z_0(s);s\in J\}$ 被 σ,γ 所截得的子弧围成圆盘区域 D, 由于 J 包含在某个 I_j 中, 故 D 中任意割点在曲线 c_j 上. 因此 D 中任一割点在 $\Sigma_\epsilon(x)$ 中, 并且可由 $C(\mathcal{C})\bigcap(\Sigma_\epsilon(x)\bigcup\{x\})$ 中的 Jordan 弧与 x 相连接. 综上所述, 存在 $B(x,\epsilon)$ 中的有限多个正规割点 y_i, 使得 $U\bigcap C(\mathcal{C})$ 是树, 其中 $U:=B(x,\epsilon)\bigcap_i\Sigma_{2\epsilon}(y_i;x)$ 是 x 的邻域. 证毕.

在命题 4.2.2 和 4.2.3 中, 可知每个完全非退化割点处的扇形可被 $C(\mathcal{C})$ 中从割点出发的 Jordan 弧平分. 这一性质对任一割点处的扇形都成立, 在给出这一命题之前, 我们需要定义一些术语.

称 Jordan 弧 $c:[a,b]\longrightarrow M$ 具有 $c(t_0)$ 处的左 (或右) 切线 $v\in S_{c(t_0)}M:=\{v\in T_{c(t_0)}M;\|v\|=1\}$, $t_0\in(a,b]$ (或 $t_0\in[a,b)$), 当且仅当 $\exp^{-1}_{c(t_0)}c(t)/\|\exp^{-1}_{c(t_0)}c(t)\|$ 当 $t\to t_0-0$ 时 (或 $t\to t_0+0$ 时) 收敛于 v. 这里 $\exp^{-1}_{c(t_0)}$ 为 $\exp_{c(t_0)}$ 在 $\mathbf{0}_{c(t_0)}$ 处的局部逆.

命题 4.2.4 设 $c:[0,1]\longrightarrow C(\mathcal{C})$ 为扇形 $\Sigma_{2\epsilon}(p)$ 在 $p=c(0)$ 处的 Jordan 弧, 则 c 在 $c(0)$ 处具有右切线, 并且它平分 $\Sigma_{2\epsilon}(p)$ 在 p 处的内角.

证明 由于 $\Gamma(c(0))$ 由单个 $\mathcal{C}$-线段组成的情形是平凡的, 由定理 1.7.1, 我们只证明另外一种情形; 见图 4.2.2. $\Sigma_{2\epsilon}(p)$ 在 p 处的内角小于 2π, 否则 $\Gamma(p)$ 由单个元素组成. 设 α, β 是围成 $\Sigma_{2\epsilon}(p)$ 的 $\mathcal{C}$-线段. 选取充分小的 ϵ, 假设对某个正数 a, $c(a)\notin\Sigma_\epsilon(p)$. 则 c 的子弧 $c|_{[0,b]}$ $(0<b<a)$ 将 $\Sigma_\epsilon(p)$ 划分为两个分支 D_1 和 D_2. 由于在其内部没有 $\mathcal{C}$-线段与曲线 c 相交, 故对每个 $c(t),t\in(0,b)$, 存在 $\Gamma(c(t))$ 的 $\mathcal{C}$-线段分别在 D_1 和 D_2 中. 因此对每个 $c(t)$, $t\in(0,b)$, 得到两个不同的扇形 $\Sigma^+_{2\epsilon}(c(t))$ 和 $\Sigma^-_{2\epsilon}(c(t))$, 使得

$$\Sigma^+_{2\epsilon}(c(t))\supset c(t,b],\qquad \Sigma^-_{2\epsilon}(c(t))\supset c(0,t].$$

由扇形性质 S4 (见定义 4.2.1), 对每个 $t\in(0,b]$ 可选取 $\mathcal{C}$-线段 $\alpha^+_t,\beta^+_t\in\Gamma(c(t))$ (或 $\alpha^-_t,\beta^-_t\in\Gamma(c(t))$) , 它们围成 $\Sigma^+_{2\epsilon}(c(t))$ (或 $\Sigma^-_{2\epsilon}(c(t))$), 并且

$$\lim_{t\to+0}\alpha^+_t=\alpha,\qquad \lim_{t\to+0}\beta^+_t=\beta$$

$$(\text{或}\ \lim_{t\to+0}\alpha^-_t=\alpha,\qquad \lim_{t\to+0}\beta^-_t=\beta\ ).$$

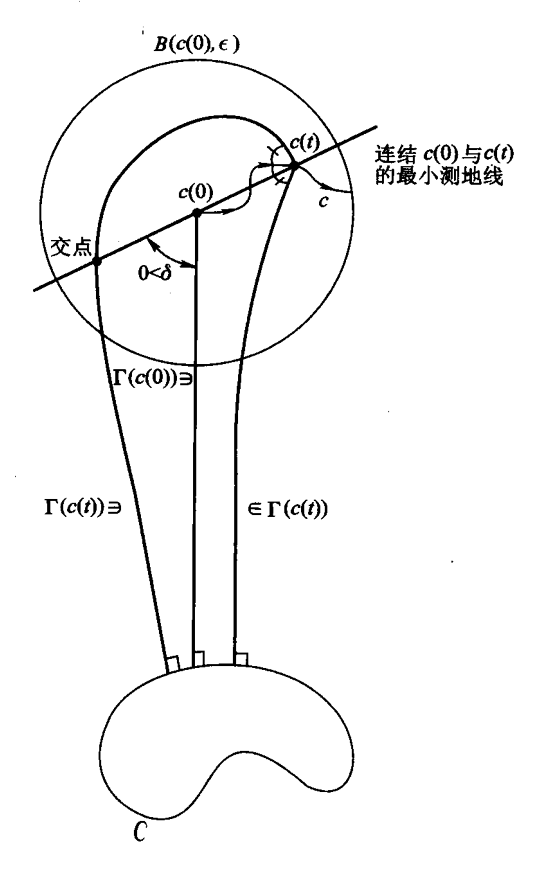


图 4.2.2

假设存在序列 $\{c(t_i)\}$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 0$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} \angle(\exp_p^{-1}\alpha(\epsilon), \exp_p^{-1}c(t_i)) =: \theta,$$
$$\lim_{i\to\infty} \angle(\exp_p^{-1}\beta(\epsilon), \exp_p^{-1}c(t_i)) =: \theta'.$$

由三角不等式得

$$\begin{aligned} d(\beta_{t_i}^-(\epsilon), c(t_i)) - d(\beta_{t_i}^-(\epsilon), p) &\leqslant d(C, c(t_i)) - d(C, p) \\ &\leqslant d(\alpha(\epsilon), c(t_i)) - d(\alpha(\epsilon), p). \end{aligned}$$

对上式两边应用第一变分公式得

$$\begin{aligned} -\cos\theta' &= \lim_{i\to\infty} \frac{d(\beta_{t_i}^-(\epsilon), c(t_i)) - d(\beta_{t_i}^-(\epsilon), p)}{d(c(t_i), p)} \\ &\leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{d(\alpha(\epsilon), c(t_i)) - d(\alpha(\epsilon), p)}{d(c(t_i), p)} = -\cos\theta. \end{aligned}$$

由以上讨论的对称性可知 $\theta = \theta'$. 故命题证毕.

§3 割迹距离函数的绝对连续性

在 [34] 中, Hartman 尝试证明, 若 ρ 是有限的, 则它是绝对连续的. 他证明了若对任意实数 r, 函数 $\rho_r := \min\{\rho, r\}$ 具有有界变分, 则 ρ 在其取有限值的点绝对连续. 这一性质在 Ambrose 问题的 2 维情形中有一个有趣的应用, Hebda 在 [35] 中提到了这一点. 附带介绍一下, 这一问题的 2 维情形可以如下给出: 设 M 和 $\bar{M}$ 是完备连通的 2 维黎曼流形, Gauss 曲率分别为 G 和 $\bar{G}$. 假设对 $p \in M$ 和 $\bar{p} \in \bar{M}$, 存在线性等距 $I : T_pM \longrightarrow T_{\bar{p}}\bar{M}$, 使得对每个切向量 $X \in T_pM$, $G(\exp_p X) = \bar{G}(\exp_{\bar{p}} I(X))$. 若 M 是单连通的, 则是否存在等距浸入 $F : M \longrightarrow \bar{M}$, 使得在 p 处 $F(p) = \bar{p}, \mathrm{d}F = I$?

1993 年 Hebda 在 [36] 中, Itoh 在 [41] 中分别独立解决了这一问题. 其方法是对 $C = \{p\}$ 的情形, 对任意 r, 证明 ρ_r 具有有界变分. 由于若函数 P 有限, 则 P 为光滑的, 故以下引理是平凡的.

引理 4.3.1 对任意实数 r, 函数 $P_r : [0, L_0] \longrightarrow (0, r]$ 是 Lipschitz 连续的, 其中 $P_r := \min\{P, r\}$.

设 E_0 和 E_1 是 $[0, L_0]$ 的闭子集, 定义如下:

$$E_0 := \{s \in [0, L_0]; \rho(s) = P(s)\},$$

$$E_1 := \{s \in [0, L_0]; \rho(s) < +\infty \text{ 且 } \gamma_s \mid_{[0,2\rho(s)]} \text{ 为 } C\text{-回路}\}.$$

C-回路的定义见定义 4.2.2. 为方便起见, 我们对 C 曲线重新参数化, 取 $0 \in E_0 \bigcup E_1$, 则可以得到开区间 I_j 的可数族, 使得 $[0, L_0] \setminus E_0 \bigcup E_1 = \bigcup_j I_j$. 由引理 4.2.3 可知以下引理是平凡的.

引理 4.3.2 对任意 $s_0 \in E_0$ 和 $s \in [0, L_0]$, 有

$$\rho_r(s) - \rho_r(s_0) \leqslant K(P_r) \mid s - s_0 \mid,$$

其中 $K(P_r)$ 为 P_r 的 Lipschitz 常数.

定义只依赖于 r 的正常数 $C_1(r)$, $C_2(r)$, $C_3(r)$ 为

$$\begin{aligned}
C_1(r) &:= \max\{\mid f(s,t) \mid /2; 0 \leqslant s \leqslant L_0, 0 \leqslant t \leqslant r\},\\
C_2(r) &:= C_1(r)(r/\min \rho - 1),\\
C_3(r) &:= \max\{C_1(r), C_2(r)\}.
\end{aligned}$$

引理 4.3.3 对任意 $s_0 \in E_1$ 和 $s_1 \in [0, L_0]$, 有

$$\rho_r(s_1) - \rho_r(s_0) \leqslant C_3(r) \mid s_1 - s_0 \mid .$$

证明 假设 $\rho(s_0) < \rho(s_1) \leqslant r$, 另一种情形容易证明. 假设 $\rho(s_1) \leqslant 2\rho(s_0)$, 定义 $[0, L_0]$ 上的光滑曲线 $\varphi(s) := z(\rho(s_1), s)$. 由距离函数 d 的定义知

$$\begin{aligned} d(\gamma_{s_1}(\rho(s_1)), \gamma_{s_0}(\rho(s_1))) &\leqslant \left| \int_{s_0}^{s_1} \mid \varphi'(s) \mid \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \left| \int_{s_0}^{s_1} \mid f(\rho(s_1), s) \mid \mathrm{d}s \right| \leqslant 2C_1(r) \mid s_1 - s_0 \mid . \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

由于 $\gamma_{s_0} \mid_{[0, 2\rho(s_0)]}$ 为 $\mathcal{C}$-回路, 故

$$d(\mathcal{C}, \gamma_{s_0}(\rho(s_1))) = 2\rho(s_0) - \rho(s_1). \tag{4.3.2}$$

由三角不等式得

$$\begin{aligned} d(\gamma_{s_1}(\rho(s_1)), \gamma_{s_0}(\rho(s_1))) &\geqslant d(\mathcal{C}, \gamma_{s_1}(\rho(s_1))) - d(\mathcal{C}, \gamma_{s_0}(\rho(s_1))) \\ &\geqslant 2(\rho(s_1) - \rho(s_0)). \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

因此由 (4.3.1) 和 (4.3.3) 可知, 若 $\rho(s_1) \leqslant 2\rho(s_0) \leqslant 2r$, 则可以证得引理结论. 现假设 $\rho(s_1) > 2\rho(s_0)$, 则若取正数 $s_2 \in [0, L_0]$ 满足 $\rho(s_2) = 2\rho(s_0)$, 可得 $\mid s_0 - s_1 \mid \geqslant \mid s_0 - s_2 \mid$. 对数对 s_0, s_2 应用第一种情形的理由, 有

$$\rho(s_0) = \rho(s_2) - \rho(s_0) \leqslant C_1(r) \mid s_2 - s_0 \mid . \tag{4.3.4}$$

因而

$$\begin{aligned} \rho(s_1) - \rho(s_0) &\leqslant \rho(s_0) \left(\frac{\rho(s_1)}{\min \rho} - 1 \right) \leqslant (\rho(s_2) - \rho(s_0)) \left(\frac{r}{\min \rho} - 1 \right) \\ &\leqslant C_2(r) \mid s_2 - s_0 \mid \leqslant C_2(r) \mid s_1 - s_0 \mid . \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

引理证毕.

引理 4.3.4 若 ρ 在 $s = s_0$ 处达到局部极小值, 则 $s_0 \in E_0 \bigcup E_1$.

证明 记 $p = z(\rho(s_0), s_0)$, 假设 $s_0 \notin E_0 \bigcup E_1$, 则 p 容许至少两个扇形. 由于 $s_0 \notin E_1$, 存在 p 处的扇形 $\Sigma_\epsilon(p)$ 与 γ_{s_0} 邻接, 并且在 p 处的内角 θ 小于 π. 不失一般性, 假设对某个 $\epsilon_1 > 0$, $C(\mathcal{C})$ 中的 Jordan 弧 $\{z(\rho(s), s); s_0 - \epsilon_1 \leqslant s \leqslant s_0\}$ 在扇形 $\Sigma_\epsilon(p)$ 中. 由于对每个 $s \in [s_0 - \epsilon, s_0]$,

$$\rho(s) = d(\mathcal{C}, \gamma_s(\rho(s))) \leqslant d(z_0(s_0), \gamma_s(\rho(s))).$$

由三角不等式得

$$\begin{aligned}\rho(s_0)-\rho(s) &\geqslant d(z_0(s_0),p)-d(z_0(s_0),c(s))\\ &\geqslant d(\gamma_{s_0}(\rho(s_0)-\epsilon),p)-d(\gamma_{s_0}(\rho(s_0)-\epsilon),c(s)),\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

其中 $c(s)=z(\rho(s),s)$.

由第一变分公式和命题 4.2.4 得

$$\lim_{s\to s_0}\frac{d(\gamma_{s_0}(\rho(s_0)-\epsilon),p)-d(\gamma_{s_0}(\rho(s_0)-\epsilon),c(s))}{d(p,c(s))}=\frac{\cos\theta}{2}.\tag{4.3.7}$$

因此, 由 (4.3.6) 和 (4.3.7), 由于 θ 小于 π, 故 ρ 在 s_0 处不能达到局部最小值. 矛盾. 证毕.

引理 4.3.5　对每个上述的区间 I_j,

$$V(\rho_r\,|_{I_j})\leqslant C(r)\mid I_j\mid.$$

其中 $V(\rho_r\,|_{I_j})$ 为 $\rho_r\,|_{I_j}$ 的全变分, $C(r):=\max\{K(P_r),C_3(r)\}$, $\mid I_j\mid$ 为 I_j 的长度.

证明　由于 ρ 在 I_j 内部不取局部极小值, 故 $\rho\,|_{I_j}$ 为单调的或具有唯一的极大值 $\rho(t_1)$, 使得 ρ 在 $[a_j,t_1]$ 上为单调不减的, 在 $[t_1,b_j]$ 上为单调不增的, 其中 $(a_j,b_j)=I_j$. 由引理 4.3.2 和引理 4.3.3 可得结论. 证毕.

命题 4.3.1　对任意 $r>0$, ρ_r 的变分有界.

证明　设 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=L_0$ 是 $[0,L_0]$ 的任意细分. 若 $(t_i,t_{i+1})\bigcap(E_0\bigcup E_1)\neq\varnothing$, 则可选取 $[t_i,t_{i+1}]\bigcap(E_0\bigcup E_1)\neq\varnothing$ 的最小值 a 和最大值 b. 因而

$$(t_i,a)\bigcap(E_0\bigcup E_1)=\varnothing=(b,t_{i+1})\bigcap(E_0\bigcup E_1).$$

如若需要, 取 $[0,L_0]$ 的更为精细的细分, 可假设若 $(t_i,t_{i+1})\bigcap(E_0\bigcup E_1)$ 非空, 则 $t_i,t_{i+1}\in E_0\bigcup E_1$. 将 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 分割为两个不相交的子集 A 和 B:

$$\begin{aligned}A&:=\{i;(t_i,t_{i+1})\bigcap(E_0\bigcup E_1)=\varnothing\},\\ B&:=\{i;(t_i,t_{i+1})\bigcap(E_0\bigcup E_1)\neq\varnothing\}.\end{aligned}$$

则由引理 4.3.2, 引理 4.3.3 和引理 4.3.5 得

$$\sum_{i\in A}\mid\rho_r(t_i)-\rho_r(t_{i+1})\mid\leqslant C(r)\sum_j\mid I_j\mid\leqslant L_0C(r),$$

并且

$$\sum_{i\in B}\mid\rho_r(t_i)-\rho_r(t_{i+1})\mid\leqslant C(r)\sum_{i\in B}\mid t_{i+1}-t_i\mid\leqslant L_0C(r).$$

因此对 $[0, L_0]$ 的任意子分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = L_0$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mid \rho_r(t_i) - \rho_r(t_{i+1}) \mid \leqslant 2L_0C(r).$$

证毕.

练习 4.3.1 将命题 4.3.1 推广为以下情形: M 中的光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 容许一个光滑的周期单位法向量场.

定义 4.3.1 称 $t > 0$ 为非正规的 (或正规的), 若 $S(\mathcal{C}, t)$ 中存在非正规点 (或正规点). 同样, $t > 0$ 称为特例的, 若它是正规的或非正规的但存在 $s \in \rho^{-1}(t)$, 使得 $\rho'(s) = 0$. 正数 t 定义为非特例的, 当且仅当它不是特例的.

引理 4.3.6 特例值的集合是闭的, 并且 Lebesgue 测度为 0.

证明 由命题 4.2.2 知, 满足 $\rho'(s) \neq 0$ 的正规割点的集合 $z(\rho(s), s)$ 在 $\mathcal{C}$ 的割迹中是相对开的. 因此特例值的集合是闭的. 由命题 4.2.3, 完全非退化非正规割点的 ρ-值集合是离散的. 特别地, 这个集合的 Lebesgue 测度为 0. 由引理 4.1.2 和引理 4.2.3 可知, 所有退化割点的 ρ-值集合是零测集. 注意到 $\{s \in [0, L_0]; P(s) < +\infty\}$ 是可数个区间的并集, 因此非正规值的集合是零测集. 由命题 4.2.2, ρ 在

$$\{s \in [0, L_0]; z(\rho(s), s) \text{ 为正规割点}\}$$

上是光滑的. 因此由引理 4.1.2,

$$\{\rho(s); z(\rho(s), s) \text{ 为正规割点且 } \rho'(s) = 0\}$$

是零测集. 于是证明了特例值的集合是零测集. 证毕.

定理 4.3.1 设 M 为完备连通的光滑 2 维黎曼流形, 光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 将 M 划分为两个分支. 则对任意正数 r, ρ_r 绝对连续. 特别地, ρ 在每个取有限值的紧致区间上绝对连续.

证明 不失一般性, 假设 r 为非特例的, 设 ϵ 为任意的正数. 由命题 4.3.1 和引理 4.1.1 知, 存在正数 $\delta = \delta(\epsilon, r)$, 使得

$$\int_B n_r(t)\mathrm{d}t < \epsilon \tag{4.3.8}$$

对 $[0, r]$ 的任意满足 $\mid B \mid < \delta$ 的 Borel 子集 B 成立, 其中 $\mid B \mid$ 为 B 的 Lebesgue 测度, $n_r(t)$ 为 $\rho^{-1}(t)$ 中元素个数. 由引理 4.3.6, 存在 $[0, r]$ 的有限多个非交叠的开子区间 $I_1, \cdots, I_k$, 其中任意一个的端点是非特例的, 且 $[0, r]$ 中特例值的集合

被 $I_j,\ j=1,\cdots,k$ 的并集所覆盖, 满足

$$\sum_{j=1}^{k} | I_j |< \delta. \tag{4.3.9}$$

若 Σ 为 $I_j,\ j=1,\cdots,k$ 的并集, 则由 (4.3.8) 得

$$\int_{\Sigma} n_r(t)\mathrm{d}t < \epsilon. \tag{4.3.10}$$

由于 I_j 的任一端点是非特例的, 故 $S_1 := \rho^{-1}(\Sigma)$ 为非重叠开区间 $I'_1,\cdots,I'_l$ 的有限并. 由推论 4.1.1 知

$$\Lambda_{\rho_r}(S_1) = \int_{\Sigma} n_r(t)\mathrm{d}t. \tag{4.3.11}$$

由于 S_1 是开的, 故集合

$$S_2 := \{s \in [0, L_0]; \rho(s) \leqslant r, s \notin S_1\}$$

是闭的, 因而是紧致的. 由于 ρ 在 S_2 的每一点是光滑的, 由命题 4.2.2, 存在正常数 c, 使得在 S_2 上有

$$| \rho'(s) |\leqslant c. \tag{4.3.12}$$

设 $J_1,\cdots,J_q$ 是 $[0, L_0]$ 的任意非重叠闭子区间, 使得

$$\sum_{j=1}^{q} | J_j |< \frac{\epsilon}{c}. \tag{4.3.13}$$

由于 S_1 是有限个开区间的并集, 可以取每个 $\operatorname{int} J_i$ 与 S_1 不相交或包含于 S_1 中来证明

$$\sum_{j=1}^{q} | \rho_r(b_j) - \rho_r(a_j) |< 2\epsilon, \tag{4.3.14}$$

其中 $[a_j, b_j] = J_j$. 进而由于 r 是非特例的, 且 ρ_r 在一个满足 $\rho |_I\geqslant r$ 的闭区间 I 上的全变分为零, 故可以假设对每个 j,

$$\max\ \rho |_{I_j}\leqslant r. \tag{4.3.15}$$

由不等式 (4.3.14) 可以得到 ρ_r 绝对连续. 若 $\operatorname{int} J_j$ 与 S_1 不相交, 则由假设 (4.3.15) 知 I_j 包含于 S_2 中, 因此由 (4.3.12) 得

$$| \rho_r(b_j) - \rho_r(a_j) |\leqslant c | J_j | . \tag{4.3.16}$$

若 $\operatorname{int} J_j$ 包含于 S_1 中, 则由于 $V(\rho_r |_{J_j}) = \Lambda_{\rho_r}(J_j)$, 故

$$| \rho_r(b_j) - \rho_r(a_j) |\leqslant \Lambda_{\rho_r}(J_j), \tag{4.3.17}$$

由以上可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{q} |\rho_r(b_j)-\rho_r(a_j)| \\
=& \sum_{\text{int } J_j \cap S_1=\varnothing} |\rho_r(b_j)-\rho_r(a_j)| + \sum_{\text{int } J_j\subset S_1} |\rho_r(b_j)-\rho_r(a_j)| \\
\leqslant& \sum_{\text{int } J_j \cap S_1=\varnothing} c\,|J_j| + \sum_{\text{int } J_j\subset S_1} \Lambda_{\rho_r}(J_j) \leqslant \epsilon+\Lambda_{\rho_r}(S_1)\leqslant 2\epsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

练习 4.3.2 将定理 4.3.1 推广到以下情形: M 上的任意光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 容许一个光滑的周期单位法向量场.

由命题 4.3.1 知, $C(\mathcal{C})$ 的同一连通分支的任意两个割点可以由割迹中的可求长曲线相连接. 进而, 若 $C(\mathcal{C})$ 中的曲线 c 定义为 $c(s)=z(\rho(s),s)$, $s\in[a,b]$, 则由定理 4.3.1 知, c 绝对连续. 因而曲线的长度 $L(c)$ 定义为

$$L(c):=\int_a^b |\dot{c}(s)|\,\mathrm{d}s.$$

因此 $C(\mathcal{C})$ 的每个分支的内蕴度量 δ 定义为

$$\delta(p,q):=\inf\ L(c),$$

其中对 $C(\mathcal{C})$ 中所有连接 p,q 的绝对连续曲线取下确界. 对于不在同一分支中的两点 p,q, 定义

$$\delta(p,q)=+\infty.$$

定理 4.3.2 内部度量 δ 是完备距离函数, 且 δ 诱导的拓扑与 d 诱导的拓扑是相容的.

证明 设 $\{p_n\}$ 为 $C(\mathcal{C})$ 中任一在 d 的意义下收敛于点 p 的点的序列. 对每个 p_n, 取 $s_n\in[0,L_0]$, 使得 $p_n=z(\rho(s_n),s_n)$. 设 $b\in[0,L_0]$ 为 $\{s_n\}$ 的极限点, 则由命题 4.2.1, $p=z(\rho(b),b)$. 于是 p 是 $\mathcal{C}$ 的割点. 由 δ 的定义知

$$\delta(p_n,p)\leqslant\left|\int_b^{s_n}|\dot{c}(s)|\,\mathrm{d}s\right|,$$

其中 $c(s):=z(\rho(s),s)$. 由于 c 绝对连续, 故 $|\dot{c}(s)|$ 是 Lebesgue 可积的, 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(p_n,p)=0$. 于是证明了定理的后一个结论, 前一个结论是后一个结论的简单推论. 证毕.

练习 4.3.3 对于 M 中的任意光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 具有周期单位法向量场的情形证明定理 4.3.2.

以下的引理是扇形性质 S3 的推论 (见 § 4.2).

引理 4.3.7 $C(\mathcal{C})$ 中的点 p 是 $\dot{C}(\mathcal{C})$ 的端点当且仅当 p 恰有一个扇形.

定理 4.3.3 设 M 是完备连通光滑的 2 维黎曼流形, 光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 将 M 划分为两个分支, 则 $\mathcal{C}$ 的割迹由可数个可求长度的 Jordan 弧和割迹的端点组成.

证明 对每个 $s \in [0, L_0]$ 且 $\rho(s) < +\infty$, 选取 $[0, L_0]$ 的闭子区间 I_s, 使得 $c(I_s)$ 在一个凸邻域中, 其中 $c(u) := z(\rho(u), u)$. 从 $\{I_s\}_s$ 中选取可数个闭子区间 $\{I_n\}_{n=1,2,\cdots}$, 使得 $\bigcup\limits_n I_n = \{s \in [0, L_0]; \rho(s) < +\infty\}$. 由于 $c|_{I_n}$ 在凸邻域中, 故 $c(I_n)$ 是树. 于是只要证明对每个 I_n, $c(I_n)$ 是可数个 Jordan 弧和端点集合的并集. 选定 $c(I_n)$ 中的点 p, 选取点 $q_1 \in c(I_n)$, 使得 $\delta(q_1, p) = \max\{\delta(p, q); q \in c(I_n)\}$. 设 J_1 为 $c(I_n)$ 中唯一连接 p, q_1 的可求长 Jordan 弧, 假设已定义曲线 $J_1, \cdots, J_k$, 选取点 $q_{k+1} \in c(I_n)$, 使其与集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} J_i$ 的距离最远, 则由连接 q_{k+1} 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} J_i$ 的可求长 Jordan 弧的唯一性定义 J_{k+1}. 若对某个 k, J_k 的长度 a_k 为零, 则 $c(I_n)$ 是 J_i 的有限并. 若对所有的 k, a_k 为正, 则由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 不超过 $c(I_n)$ 的长度, 并由定理 4.3.1 知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 为有限的, 于是 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. 因而集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} J_i$ 是 $c(I_n)$ 的稠密子集, 由于 $c(I_n)$ 是树, 这表明 $c(I_n)$ 是 J_i 和端点集合的并集. 证毕.

练习 4.3.4 对 M 上的任意光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 证明定理 4.3.3.

$C(\mathcal{C})$ 的一个割点 p 称为分支点, 若对一个包含 p 的开树 T, $T \setminus \{p\}$ 具有至少三个连通分支. $T \setminus \{p\}$ 的分支的个数称为割点的阶.

推论 4.3.1 $C(\mathcal{C})$ 的割迹容许至多可数个分支点.

练习 4.3.5 证明点 $p \in C(\mathcal{C})$ 是分支点当且仅当 p 容许至少三个扇形.

注 4.3.1 Gluck 和 Singer 构造了一个旋转紧凸曲面, 使得一个点在曲面上的割迹容许无穷阶的分支点 (见 [28]).

§4 测地圆的构造

对于每个非正数 t, 记

$$S_+(\mathcal{C},t) := \{x \in M_+; d(x,\mathcal{C}) = t\}.$$

这里 M_+ 为包含 $\{z(\rho(s),s);\rho(s) < \infty\}$ 的 $M \setminus \mathcal{C}$ 的分支. 本节将对非特例值 t 讨论 $S_+(\mathcal{C},t)$ 的构造.

定义 4.4.1 记 $\mathcal{E} \subset [0,\infty)$ 为所有特例值的集合.

注意到集合 $\mathcal{E}$ 是闭的, 并由引理 4.3.6 知其为 Lebesgue 零测集.

引理 4.4.1 设 t 为非特例点, 则 $\rho^{-1}(t)$ 具有至多有限多个元素, 元素的个数 $n_\rho(t)$ 为偶数, 并且在每个非特例值的区间上为常数.

证明 由命题 4.2.2 和非特例值的定义, ρ 是光滑的, 且在 $\rho^{-1}(t)$ 中的每点处 $\rho' \neq 0$, 因而 $\rho^{-1}(t)$ 有至多有限个元素, $n_\rho(t)$ 在每个非特例值区间上为常数. 对每个 $s_1 \in \rho^{-1}(t)$, 存在唯一的 $s_2 \in \rho^{-1}(t) \setminus \{s_1\}$, 使得 $z(\rho(s_1),s_1) = z(\rho(s_2),s_2)$, 这是因为割点是正规的, 因此 $n_\rho(t)$ 为偶数. 证毕.

以下的定理给出了对非特例值 t 在 $M \setminus \mathcal{C}$ 具有两个分支的情形下 $S_+(\mathcal{C},t)$ 的结构, 类似的结果对另一种情形也成立, 详细证明见 [86] 中命题 4.3.

定理 4.4.1 设 M 为完备连通光滑的 2 维黎曼流形, 光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$ 围成 M 的一个区域. 若 $t > 0$ 是非特例值, 则 $\rho(s) = t$ 具有 $2m \bmod L_0$ 个解 $(m > 0)$, 且可将其排序为 $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \beta_m (< \alpha_1 + L_0)$, 使得对 $k = 1,\cdots,m, \alpha_{m+1} = \alpha_1 + L_0$, 且在 (α_k,β_k) 上 $\rho > t$, 在 (β_k,α_{k+1}) 上 $\rho < t$. $S_+(\mathcal{C},t)$ 由光滑曲线 $z(t,s)$, $\alpha_k \leqslant s \leqslant \beta_k$, $k = 1,\cdots,m$ 组成, 并且构成了一个隅角在 $z(t,\alpha_k)$, $z(t,\beta_k)$ 处且分段光滑的简单闭曲线的集合. $S_+(\mathcal{C},t)$ 的长度为

$$L_+(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t,s)\mathrm{d}s. \tag{4.4.1}$$

进而 $L_+(t)$ 在 $(0,\infty) \setminus \mathcal{E}$ 上光滑, 且关于 t 的导数为

$$L'_+(t) = \int_{S_+(\mathcal{C},t)} \kappa(\bar{s};t)\mathrm{d}\bar{s} - \sum_k 2\tan\frac{\theta_k}{2}, \tag{4.4.2}$$

其中 $\mathrm{d}\bar{s}$ 是 $S_+(\mathcal{C},t)$ 的线元素, $\kappa(\bar{s};t)$ 为曲线的测地曲率, θ_k 为扇形在不可微点的内角.

注 4.4.1 Fiala [26] 对实解析黎曼平面结合等周不等式证明了以上定理. Hartman 将 Fiala 的结果推广到具有 C^2-度量的黎曼平面. 这些结果在 [81,82,85, 86] 中推广到了完备光滑 2 维开黎曼流形, 并在 [87] 中推广到 Alexandrov 曲面.

证明 由引理 4.4.1 知 α_k 和 β_k 的存在性是平凡的, 故容易验证等式 (4.4.1). 由于 t 是非特例的, 故 ρ 的导数 ρ' 存在, 且在 $\rho^{-1}(t)$ 的邻域内非零. 因而 α_k 和 β_k 在 $(0,\infty)\setminus\mathcal{E}$ 上光滑. 将等式 (4.4.1) 关于 t 求导得

$$L'_+(t)=\sum_k\int_{\alpha_k}^{\beta_k}f_t(t,s)\mathrm{d}s+f(t,\beta_k)\frac{\mathrm{d}\beta_k}{\mathrm{d}t}-f(t,\alpha_k)\frac{\mathrm{d}\alpha_k}{\mathrm{d}t}. \tag{4.4.3}$$

由于对任意 $t\in(0,\infty)\setminus\mathcal{E}$, $d(z_0(\beta_k),z(t,\beta_k))=t$, 由第一变分公式得

$$\cos\frac{\theta_k}{2}\left\{1+f(t,\beta_k)^2\left(\frac{\mathrm{d}\beta_k}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t,\beta_k(t))\right\|\cos\frac{\theta_k}{2}=1. \tag{4.4.4}$$

由于 $\mathrm{d}\beta_k/\mathrm{d}t$ 是负的, 由 (4.4.4) 得

$$f(t,\beta_k)\frac{\mathrm{d}\beta_k}{\mathrm{d}t}=-\tan\frac{\theta_k}{2}. \tag{4.4.5}$$

对等式 $d(z_0(\alpha_k),z(t,\alpha_k))=t$ 作类似的讨论可得

$$f(t,\alpha_k)\frac{\mathrm{d}\alpha_k}{\mathrm{d}t}=\tan\frac{\theta_k}{2}. \tag{4.4.6}$$

$S_+(C,t)$ 在 $z(t,s)$ 处的测地曲率为

$$\kappa(s;t)=\frac{f_t(t,s)}{f(t,s)}. \tag{4.4.7}$$

因为 $S_+(C,t)$ 的线元素为 $f(t,s)\mathrm{d}s$, 故

$$\sum_k\int_{\alpha_k}^{\beta_k}f_t(t,s)\mathrm{d}s=\int_{S_+(C,t)}\kappa(\bar{s};t)\mathrm{d}\bar{s}.$$

因此由 (4.4.3), (4.4.5) 和 (4.4.6) 可得 (4.4.2). 证毕.

我们引入一些记号以便将函数 $L_+(t)$ 推广到特例值 t. 记

$$D_+:=\{(t,s);0\leqslant t<\rho(s),0\leqslant s\leqslant L_0\},$$

$\chi_+(t,s)$ 为 D_+ 的特征函数, 使得 $\chi_+(t,s)=1$ 或 0 分别对应 $(t,s)\in D_+$ 或 $(t,s)\notin D_+$. 对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$L_+(t):=\int_0^{L_0}\chi_+(t,s)f(t,s)\mathrm{d}s. \tag{4.4.8}$$

容易验证若 t 为非特例值, 则由 (4.4.8) 定义的函数 $L_+(t)$ 等于 $S_+(C,t)$ 的长度. 对 $t\geqslant 0$, 如下定义 $Q_+(t)$:

$$Q_+(t):=\{s\in\rho^{-1}(t);z(s,t)\ \text{是正规的且}\ \rho'(s)=0\}.$$

对每个正整数 n, 由于若 $t_1 \neq t_2$, 则 $Q_+(t_1)$ 和 $Q_+(t_2)$ 是 $[0, L_0]$ 的不交子集, 故集合

$$\{t \in [0, \infty); | Q_+(t) | \geqslant 1/n\}$$

是有限的. 故除了至多可数个 t 以外, $Q_+(t)$ 的 Lebesgue 测度为零. 定义 $[0, \infty)$ 上的函数 $J_+(t)$ 为

$$J_+(t) := \sum_{0 \leqslant u \leqslant t} \int_{Q_+(u)} f(u, s) \mathrm{d}s. \tag{4.4.9}$$

L_+ 和 J_+ 在 $t = t_0$ 处不连续当且仅当 $| \ Q_+(t_0) \ |$ 非零. 在特例点 t 处, 函数 $L_+(t)$ 没有几何意义. 这里我们给出 $L_+(t)$ 等于 $S_+(\mathcal{C}, t)$ 的长度的充分条件.

定义 4.4.2 (连续曲线的长度) 连续曲线 $c : [a, b] \to M$ 的长度定义为

$$L(c) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} d(c(t_i), c(t_{i-1})); a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < b = t_k \right\}.$$

注意若曲线 c 光滑, 则其长度等于 $\displaystyle\int_a^b \| \dot{c}(t) \| \mathrm{d}t$.

引理 4.4.2 若 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1-函数, 则集合 $f(\{t \in [a, b]; \mathrm{d}f_t = 0\})$ 的 1 维 Hausdorff 测度为零.

证明 为方便起见, 记

$$A := \{t \in [a, b]; \mathrm{d}f_t = 0\}, \qquad B := f(A).$$

设 ϵ 为任意正数, 对每个 $t_0 \in A$, 存在开区间 $I_\epsilon(t_0) (\ni t_0)$, 使得函数 $f |_{I_\epsilon(t_0)}$ 具有 Lipschitz 常数 ϵ, 因而有 $\mathcal{H}^1(f(I_\epsilon(t_0))) \leqslant \epsilon \mathcal{H}^1(I_\epsilon(t_0))$. 这里 $\mathcal{H}^1$ 为 1 维 Hausdorff 测度, 由于 A 紧致, 存在 A 中有限个元素 $t_1, \cdots, t_k$, 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_\epsilon(t_i)$. 若 $I_\epsilon(t_i) \bigcap I_\epsilon(t_j)$ 非空, 则函数 $f |_{I_\epsilon(t_i) \bigcup I_\epsilon(t_j)}$ 在区间上具有 Lipschitz 常数 ϵ, 因此可以假设 $\{I_\epsilon(t_i)\}$ 互不相交, 故有

$$\mathcal{H}^1(B) \leqslant \epsilon \sum_i \mathcal{H}^1(I_\epsilon(t_i)) \leqslant \epsilon \mathcal{H}^1([a, b]).$$

这表明 $\mathcal{H}^1(B) = 0$. 证毕.

定义 4.4.3 点 $x \in M$ 称为到 M 的紧致子集 C 的距离函数的临界点, 若对任意单位向量 $v \in T_x M$, 存在连接 x 与 C 的极小测地线段 σ, 使得 $\langle \dot{\sigma}(0), v \rangle \geqslant 0$.

注 4.4.2 若割点不容许在 p 点处内角大于 π 的扇形, 则它是距离函数 $d(\mathcal{C}, \cdot)$ 的临界点. 比较 [15] 中距离函数临界点的理论.

引理 4.4.3 假设对 M 的紧致子集 C, 存在 $t_1 < t_2$, 使得 $A(C,t_1,t_2) := \overline{B(C,t_2) - B(C,t_1)}$ 不包含到 C 的距离函数的临界点, 则 $A(C,t_1,t_2)$ 同胚于 $S(C,t_1) \times [t_1,t_2]$.

证明 对 $A(C,t_1,t_2)$ 中的每个点 q, 存在其开邻域 N 中的局部光滑向量场 X_U, 使得对任何通过点 $p \in U$ 的 C-线段 γ, X_U 和 $\dot\gamma(d(C,p))$ 在 p 点所成的角大于 $\pi/2$. 由于 $A(C,t_1,t_2)$ 紧致, 存在开邻域 $U_i(i=1,\cdots,k)$ 上的有限个局部光滑向量场 $X_i := X_{U_i}$, 使得 $A(C,t_1,t_2) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. 设 $\{\psi_i\}$ 是与 $\{U_i\}$ 相关联的单位划分. 显然 $X := \sum_i \phi_i X_i$ 在 $A(C,t_1,t_2)$ 上不为零. 进而, 对每个 $q \in A(C,t_1,t_2)$ 和通过 q 的 C-线段 γ, 对某个正数 δ, X_q 和 $\dot\gamma(d(C,q))$ 所成的角度大于 $\pi/2+\delta$. 通过正规化 X, 可以假设 X 的长度 $\|X\|$ 等于 $A(C,t_1,t_2)$ 的单位长度. 设 q 为 $A(C,t_1,t_2)$ 的元素, 且 $\sigma_q : [0,\infty) \to M$ 为 X 的积分曲线,$\sigma_q(0) = q$. 由于 $d(C,\sigma_q(s))$ 是 s 的 Lipschitz 函数, 这一函数几乎处处可微. 由第一变分公式得: 若 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)d(C,\sigma_q(s))$ 存在且 $\sigma_q(s) \in A(C,t_1,t_2)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}d(C,\sigma_q(s)) < -\sin\delta.$$

因此若 $\sigma_q(s) \in A(C,t_1,t_2)$, 则有不等式

$$d(C,\sigma_q(0)) - d(C,\sigma_q(s)) < -s\sin\delta.$$

这一不等式表明存在连续依赖于 q 的正数 $s(q)$, 使得 $\sigma_q(s(q)) \in \partial B(C,t_1)$. 因此可以构造从 $A(C,t_1,t_2)$ 到 $\partial B(C,t_1) \times [t_1,t_2]$ 的连续单射 f, 由于用同样的方法可以构造其逆映射, 故映射 f 是从 $A(C,t_1,t_2)$ 到 $\partial B(C,t_1) \times [t_1,t_2]$ 的同胚. 证毕.

引理 4.4.4 若任一点 $q \in \mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2)$, 对某个正数 t_2, q 容许一个在 q 点内角大于 π 的扇形, 则 $\mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2)$ 是有限个圆的并集, 且其总长等于 $L_+(t_2)$.

证明 设 $t_1(< t_2)$ 是充分接近 t_2 的非特例值, 使得若 $t_1 \leqslant d(\mathcal{C},q) \leqslant t_2$, 则 $\mathcal{C}$ 的割点 q 容许一个在 q 处内角大于 π 的扇形. 由定理 4.4.1 知, $\mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_1)$ 是有限个圆的并, 因此由引理 4.4.3, $\mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2)$ 也是有限个圆的并. 若对任意 $s \in [0,L_0]$, $\rho(s)$ 大于 t_2, 则后一个结论是平凡的. 因此可以假设对某个 $s \in [0,L_0]$, $\rho(s)$ 不大于 t_2. 对 $\mathcal{C}$ 重新参数化后可假设 $\rho(0) \leqslant t_2$. 因此集合 $\{s \in [0,L_0],\ \rho(s) > t_2\}$ 由至多可数个开区间 I_n 组成, $n = 1,2,\cdots$. 若 $q \in \mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2)$ 是完备非退化割点, 则由命题 4.2.2 和 4.2.3, 对某个 n, q 是集合 $\{z(t_2,s); s \in \overline{I}_n\}$ 的元素. 因此

$$\mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2) \setminus F \subset \bigcup_n \{z(t_2,s); s \in \overline{I}_n\} \subset \mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2),$$

其中 F 为 $\mathcal{C}$ 的所有退化割点的集合. 由于 $\mathcal{H}^1(F)=0$, 由引理 4.4.2 得

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_+(\mathcal{C},t_2))=\sum_n \mathcal{H}^1(\{z(t_2,s);s\in \overline{I}_n\})$$
$$=\sum_n \int_{I_n} f(t_2,s)\mathrm{d}s = L_+(t_2).$$

对任一连续 Jordan 弧 $\sigma:[a,b]\to M$, 有 $\mathcal{H}^1(\sigma(I))=L(\sigma)$. 证毕.

定理 4.4.2 在 $[0,\infty)$ 的任意紧致子区间上, 函数 $H_+(t):=L_+(t)+J_+(t)$ 绝对连续.

证明 设 $[a,b]$ 为 $[0,\infty)$ 的紧致子区间. 为证明定理, 我们证明对任意正数 ϵ, 存在正数 $\delta=\delta(\epsilon,a,b)$, 使得若 $I_1,\cdots,I_k$ 为 $[a,b]$ 的不重叠子区间, 则对 $\sum_{i=1}^k |I_i|<\delta$, 有

$$\sum_{i=1}^k \mid I_iH \mid < (L_0+2)\epsilon, \tag{4.4.10}$$

其中 $I_i=(\sigma,\tau]$, $I_iH_+=H_+(\tau)-H_+(\sigma)$. 选定 ϵ, 由命题 4.2.3 可知集合

$$T_b:=\{s\in[0,L_0];\rho(s)\leqslant b,\ 且\ z(\rho(s),s)\ 是完全非退化非正规点\}$$

是有限的. 设常数 $c=c(b)$ 满足在 $[0,b]\times[0,L_0]$ 上,

$$\mid f_t(t,s)\mid\leqslant c,\quad \mid f(t,s)\mid \leqslant c.$$

由引理 4.2.4 知, 由

$$F^\epsilon:=\{s\in[0,L_0];\rho(s)\leqslant b, s\in F, f(\rho(s),s)\geqslant \epsilon/2\}$$

定义的集合 F^ϵ 是紧致的, 且 Lebesgue 测度为零, 其中集合 F 如引理 4.2.4 定义.

设 V^ϵ 为 $[0,L_0]$ 的开子区间的有限并, 使得 $\mid V^\epsilon\mid<\epsilon/c$, $V^\epsilon\supset T_b\bigcup F^\epsilon$. 定义集合

$$Q^\epsilon:=\{s\in[0,L_0];\rho(s)\leqslant b, f(\rho(s),s)\leqslant \epsilon/2\}.$$

由于 Q^ϵ 紧致, 故它可由某个集合 S^ϵ 所覆盖, 其中 S^ϵ 由 $[0,L_0]$ 的有限多个开子区间组成, 而在每个开子区间上 $f(\rho(s),s)<3\epsilon/4$. 则集合

$$R^\epsilon:=[0,L_0]\setminus(S^\epsilon\bigcup V^\epsilon)$$

由 $[0,L_0]$ 的有限多个闭子区间 $J_1,\cdots,J_p$ 组成. 由 R^ϵ 的定义和命题 4.2.2, 若 $\rho(s)\leqslant b$, 则 ρ 在每个 $s\in R^\epsilon$ 的点处光滑. 因此函数 ρ_b 在每个区间 $J_j(j=$

$1, \cdots, p)$ 上 Lipschitz 连续. 特别地, ρ_b 在 J_j 上的限制 ρ_j 具有有界变分. 若 Λ_j 是由 ρ_j 定义的 Lebesgue-Stieltjes 测度, 则由推论 4.1.1 可知, 对每个 I_i,

$$\sum_{j=1}^{k} \Lambda_j(\rho_j^{(-1)}(I_i)) = \int_{\sigma}^{\tau} n(r)\mathrm{d}r, \tag{4.4.11}$$

其中 $n(r)$ 为 Lebesgue 可积函数, 它定义为集合

$$\{s \in R^{\epsilon}; \rho(s) = r\}$$

的元素的个数. 设 $O(i)$ 为包含 $R(i) = \bigcup\limits_{\sigma < t \leqslant \tau} Q_+(t)$ 的开集, 使得 $| O(i) \setminus R(i) | < | I_i |$. 记 $S(i) = \rho^{-1}(I_i)$, 定义

$$\begin{aligned} S_1 &:= (S(i) \setminus R(i)) \bigcap O(i), \\ S_2 &:= (S(i) \setminus R(i)) \bigcap (\{s; f(\rho(s), s) < \epsilon\} \bigcup V^{\epsilon}), \\ S_3 &:= (S(i) \setminus R(i)) \setminus (S_1 \bigcup S_2). \end{aligned}$$

由 (4.4.8) 知

$$I_i L_+ = -\int_{S(i)} f(\rho(s), s)\mathrm{d}s + \int_0^{L_0} (f(t,s) - f(\sigma, s))\chi(t,s)\mathrm{d}s. \tag{4.4.12}$$

由 $Q_+(t)$ 的定义,

$$I_i J_+ = \sum_{\sigma < t \leqslant \tau} \int_{Q_+(t)} f(t,s)\mathrm{d}s. \tag{4.4.13}$$

由于 $s \in Q_+(t)$, 故 $\rho(s) = t$, 于是有

$$I_i J_+ = \int_{R(i)} f(\rho(s), s)\mathrm{d}s. \tag{4.4.14}$$

综合 (4.4.12) 和 (4.4.14) 可得

$$\begin{aligned} | I_i H_+ | &\leqslant \sum_{j=1}^{3} \int_{S_j} f(\rho(s), s)\mathrm{d}s + 2cL_0 | I_i | \\ &\leqslant c | I_i | + \epsilon | S(i) | + c | V^{\epsilon} \bigcap S(i) | + c | S_3 | + 2cL_0 | I_i | . \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

因为 $S_3 \subset R^{\epsilon}$ 且 $S_3 \bigcap O(i) = \varnothing$, 故 ρ 在 S_3 的每点处光滑, 且对某个正常数 $c_1 = c_1(\epsilon, a, b)$, 在 S_3 上有 $| \rho' | \geqslant c_1$. 由 Lebesgue-Stieltjes 测度 Λ_j 的性质可得

$$\sum_{j=1}^{p} \Lambda_j(J_j \bigcap S_3) \geqslant c_1 \sum_{j=1}^{p} | J_j \bigcap S_3 | = c_1 | R^{\epsilon} \bigcap S_3 | = c_1 | S_3 | . \tag{4.4.16}$$

由 (4.4.11) 和 (4.4.16) 得

$$\mid S_3 \mid \leqslant c_1^{-1} \sum_{j=1}^{p} \Lambda_j (J_j \bigcap S_3) \leqslant c_1^{-1} \int_\sigma^\tau n(t) \mathrm{d}t. \tag{4.4.17}$$

由 (4.4.15) 和 (4.4.17) 得

$$\sum_{i=1}^{k} \mid I_i H_+ \mid \leqslant c(1+2L_0) \sum_{i=1}^{k} \mid I_i \mid + (L_0+1)\epsilon + cc_1^{-1} \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} n(r) \mathrm{d}r. \tag{4.4.18}$$

不等式 (4.4.18) 表明可以选取正数 $\delta = \delta(\epsilon, a, b)$ 满足 (4.4.10). 函数 $n(t)$ 为 Lebesgue 可积的. 证毕.

注 4.4.3 对于 C 不围成任何区域的情形, 若相应修正函数 $L_+(t)$, $J_+(t)$ 的定义, 可以得到与以上定理相似的结论. 与 [86] 中的 § 3 比较这种情形, C 不容许单位法向量场的情形简化为 $M-C$ 具有两个分支的情形, 正如 § 4.2 的第一段.

第五章　等周不等式

本章将在流形容许全曲率的前提下研究距离圆的结构以及有限连通的 2 维完备开黎曼流形中 Jordan 曲线的割迹. 全曲率的存在性增加了对这些结构的限制.

§1　$S(\mathcal{C},t)$ 的结构和 $\mathcal{C}$ 的割迹

本章将直接延用前一章的记号和定义.

在本节和下一节中, 用 M 表示连通且有限连通的完备光滑无边 2 维黎曼流形, 并且容许全曲率, 用 $\mathcal{C}$ 表示 M 中的光滑 Jordan 曲线. 取充分大的非特例值 t_1 和 M 的柱心 B, 使得 B 的边界 ∂B 包含在 $S(\mathcal{C},t_1)$ 中, 并且 $M\setminus B$ 同胚于 k 个管的不交并, $1\leqslant k<\infty$. 因此假设 M 恰有 k 个端, 对于每个容许至少两个 $\mathcal{C}$-线段的点 $x\in M\setminus B$, 设 $E(x)$ 为极大紧致圆盘区域, 这些区域由 ∂B 被两条从 x 出发的不同 $\mathcal{C}$-线段所截得子弧和这两条 $\mathcal{C}$-线段被 ∂B 所截得的子弧段所围成. 设对每个 $x\in M\setminus B$, 若 x 容许至少两个 $\mathcal{C}$-线段, 则 $\beta(x)$ 定义为 $E(x)$ 在 x 处的内角, 否则记 $\beta(x)=0$. 单位速度测地线 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 称为从 $\mathcal{C}$ 出发的射线, 若 $\gamma(0)\in\mathcal{C}$ 并且对所有的 t, $\gamma|_{[0,t]}$ 是 $\mathcal{C}$-线段. 设 F 是从 $\mathcal{C}$ 出发的射线上的所有点的集合, 则容易验证若 M 非紧. 则 F 为非空闭集. 因而 $M\diagdown(F\bigcup B)$ 由可数个不相交集合的并集 $\bigcup\limits_i D_i$ 构成, 其中 D_i 是由从 $\mathcal{C}$ 出发的射线的子射线 γ_i^+ 和 γ_i^- (若仅有唯一一条从 $\mathcal{C}$ 出发的射线, 则这里为一条子射线) 以及 ∂B 的子弧 J_i 围成的无界区域 (见图 5.1.1).

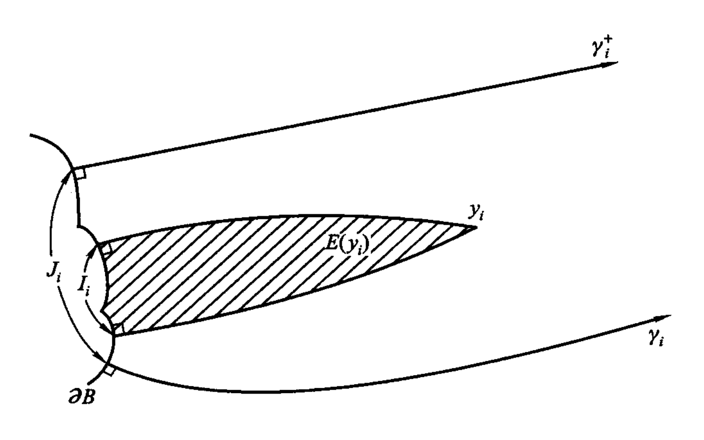


图 5.1.1

引理 5.1.1 对每个 D_i, 其全曲率为

$$c(D_i) = -\int_{J_i} \kappa(s)\mathrm{d}s - \sum_k (\pi - \omega_k^{(i)}), \tag{5.1.1}$$

其中 $\kappa(s)$ 表示 ∂B 关于 B 的单位外法向量场的测地曲率, $\omega_k^{(i)}$ 表示 D_i 在 J_i 上不可导点的内角. 进而, 对 M 中的任意发散点列 $\{x_j\}$, $\lim\limits_{j\to\infty} \beta(x_j) = 0$.

在更一般的情况下, 引理 5.1.1 实质上包含于引理 3.4.3 和 3.2.2 中.

证明 我们将在 $\gamma_i^+ \neq \gamma_i^-$ 的情形下证明引理结论, 这是因为考虑 $\overline{D_i}$ 的万有覆盖, 其他情形可以转化为这一情形. 设 $\{a_j\}$ 为非特例值 a_j 的单调递增发散序列, $a_1 > t_1$, 则存在 $\mathcal{C}$ 的割点序列 $\{y_j\} \subset S(\mathcal{C}, a_j)$, 使得 $\{E(y_j)\}$ 是满足 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E(y_j) = D_i$ 的单调序列. 若 I_j 表示被 $E(y_j)$ 所截得的 J_i 的子弧, 则 $\{I_j\}$ 构成一个单调递增序列, 满足 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j = J_i$. 注意到不存在 D_i 中从 $\mathcal{C}$ 出发的射线. 由 Gauss-Bonnet 定理, 对充分大的 j, 有

$$c(E(y_j)) = \beta(y_j) - \int_{I_j} \kappa(s)\mathrm{d}s - \sum_k (\pi - \omega_k^{(i)}). \tag{5.1.2}$$

由于 $\lim\limits_{j\to\infty} I_j = J_i$, $\lim\limits_{j\to\infty} E(y_j) = D_i$, 故当 $j \to \infty$ 时 $c(E(y_j))$ 和 $\int_{I_j} \kappa(s)\mathrm{d}s$ 存在, 并且分别等于 $c(D_i)$ 和 $\int_{J_i} \kappa(s)\mathrm{d}s$. 因此由 (5.1.2), 极限 $\lim\limits_{j\to\infty} \beta(y_j)$ 存在. 故有

$$c(D_i) = \lim_{j\to\infty} \beta(y_j) - \int_{J_i} \kappa(s)\mathrm{d}s - \sum_k (\pi - \omega_k^{(i)}). \tag{5.1.3}$$

由引理 1.2.2 和 (5.1.3) 知 $\lim\limits_{j\to\infty}\beta(y_j)=0$, 并且 (5.1.1) 成立. 假设存在 M 中点 x_j 的发散序列和正常数 c, 使得对任意 j, $\beta(x_j)\geqslant c$. 若 $\bigcup\limits_j E(x_j)$ 包含某个 D_i, 则由以上的讨论容易证明 $\liminf\limits_{j\to\infty}\beta(x_j)=0$. 因此可以假设若 $k\neq j$, 则 $E(x_k)$ 与 $E(x_j)$ 不相交. 对每个 j, 记 I_j 为 ∂B 被 $E(x_j)$ 所截的子弧, 则 $\{I_j\}$ 是 ∂B 的互不相交的子弧. 因此当 $j\to\infty$ 时, I_j 的长度趋于 0. 由 Gauss-Bonnet 定理得, 对充分大的 j,

$$c(E(x_j))=\beta(x_j)-\int_{I_j}\kappa(s)\mathrm{d}s. \tag{5.1.4}$$

特别地, 对所有充分大的 j,

$$c(E(x_j))\geqslant\frac{c}{2}, \tag{5.1.5}$$

这是因为我们已经假设对任意 j, $c\leqslant\beta(x_j)$. 不等式 (5.1.5) 表明 $c(M)=\infty$. 这是不可能的, 因为 $c(M)\leqslant 2\pi\chi(M)<\infty$ (参见定理 2.2.1). 证毕.

定理 5.1.1　设 M 为有限连通, 连通光滑无边的完备 2 维黎曼流形, 并且容许全曲率. 设 C 为 M 中的光滑 Jordan 曲线, 则存在常数 $R_1(>t_1)$, 使得对任意 $t>R_1$, $M\setminus B$ 的每个管具有 $S(C,t)$ 的唯一一个同胚于圆的分支.

证明　由引理 5.1.1, 存在 $R_1(>t_1)$, 使得对任意 $x\in M\setminus B(C,R_1)$, $\beta(x)<\pi$. 由引理 4.4.4 知, 对任意 $t\geqslant R_1$, $S(C,t)$ 是互不相交的圆的并集. 假设对某个 $a>R_1$, 在 M 的管 U 中存在至少两个 $S(C,a)$ 的分支; 见图 5.1.2. 因为 $S(C,a)\bigcap U$ 具有唯一的自由同伦于 U 的边界的分支, 故存在 $S(C,a)\bigcap U$ 的一个分支围成 U 中的紧致区域 D_1. 因而函数 $d(C,\cdot)$ 在 D_1 中的点 x 处达到极大值 $t_2>a$. 这表明对任意的 $x\in M\setminus B(C,R_1)$, $\beta(x)\geqslant\pi$. 这与 R_1 的选取矛盾. 因此对任意 $t>R_1$, 在 M 的每个管中存在 $S(C,t)$ 的唯一分支. 证毕.

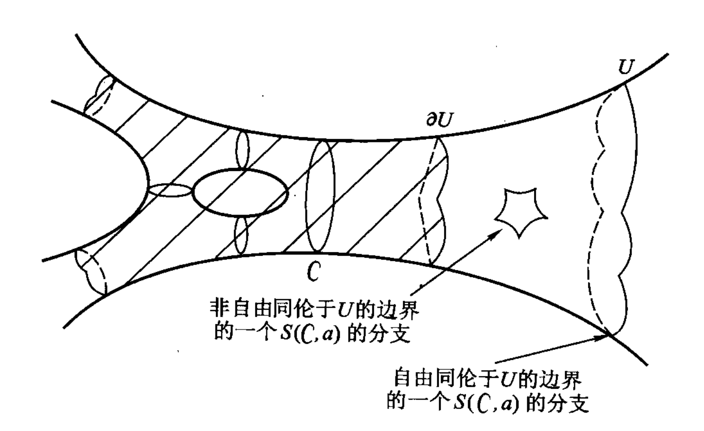


图 5.1.2

推论 5.1.1 $S(\mathcal{C},t)$ 的长度是 $[R_1,\infty)$ 的任意紧致子区间上的绝对连续函数.

证明 由定理 4.4.1 知, $H_+(t)$ 在 $[0,\infty)$ 的任意紧致子区间上绝对连续. 进而由以上定理知, $J_+(t)$ 在 $[R_1,\infty)$ 上为常数. 证毕.

命题 5.1.1 对任意正数 ϵ, 存在 $t(\epsilon)$, 使得若 $t > t(\epsilon)$, 则

$$\sum_{x\in S(\mathcal{C},t)} \beta(x) < \epsilon. \tag{5.1.6}$$

证明 对每个正整数 n, $\left\{x \in S(\mathcal{C},t); \beta(x) > \dfrac{1}{n}\right\}$ 为有限集. 因此 (5.1.6) 中的和是可数和. 对每个 $t > R_1$, 记集合 $E(t)$ 为

$$E(t) := \bigcup_{y\in S(\mathcal{C},t)} E(y),$$

其中, 若存在唯一的从 y 出发的 $\mathcal{C}$-线段, 则 $E(y) = \varnothing$. 取 $S(\mathcal{C},t)$ 中的任意元素 y, 其中 $t > R_1$, $E(y) \neq \varnothing$. 则 $y \in M \setminus (F \bigcup B) = \bigcup_i D_i$, 于是对某个 i, $y \in D_i$. 由定理 5.1.1 知, 对任意 $t' > t$, Jordan 弧 $S(\mathcal{C},t') \bigcap D_i$ 围成包含 $E(y)$ 的相对紧的 2 维圆盘区域. 因此对每个 $t' > t$, 存在 $y \in S(\mathcal{C},t')$, 使得 $E(y') \supset E(y)$. 这表明 $E(t)$ 关于 t 严格单调递增. 对每个 $t > R_1$, 记 $I(t) := E(t) \bigcap \partial B$, 其中 B 表示 § 5.1 中介绍的 M 的柱心. 由于 $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = \bigcup\limits_i D_i$, 故 $I(t)$ 关于 t 单调递增, 且 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \bigcup\limits_i J_i$. 因此存在 $t_\epsilon (> R_1)$, 使得对每个 $t > t_\epsilon$,

$$\int_{\bigcup_i J_i - I(t)} |\,\kappa(s)\,|\,\mathrm{d}s < \frac{\epsilon}{2}, \tag{5.1.7}$$

$$\int_{\bigcup_i D_i - E(t)} |\,G\,|\,\mathrm{d}M < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.1.8}$$

根据引理 5.1.1, 可由 $\sum\limits_i c(D_i)$ 有界推出 (5.1.8) 式. 任取 $t > t_\epsilon$, 对每个 $E(x)$, $x \in S(\mathcal{C},t)$, 应用 Gauss-Bonnet 定理, 由以上可得

$$\{x \in S(\mathcal{C},t); \beta(x) > 0\},$$

于是有

$$\sum_{x\in S(\mathcal{C},t)} \beta(x) \leqslant c(E(t)) + \int_{I(t)} \kappa(s)\mathrm{d}s + \sum_{k,i}(\pi - \omega_k^{(i)}). \tag{5.1.9}$$

由 (5.1.7), (5.1.8) 和引理 5.1.1 知, (5.1.9) 式的右侧小于 ϵ, 于是证得 (5.1.6). 证毕.

§2 M 有限连通的情形

下面引理是 l'Hôpital 定理的推广, 在以下定理 5.2.1 的证明中非常有用. 在此我们省略这一引理的证明.

引理 5.2.1 (l'Hôpital 定理的推广) 设 f, g 为绝对连续函数, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$. 若 $g(t)$ 单调不减, 则

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$
$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \geqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}. \tag{5.2.1}$$

练习 5.2.1 证明以上引理.

定理 5.2.1 设 M 是连通的完备非紧光滑 2 维黎曼流形. 设 $\mathcal{C}$ 为 M 上的光滑 Jordan 曲线. 若 $L(t)$ 和 $A(t)$ 分别为 $S(\mathcal{C}, t)$ 的长度和 $B(\mathcal{C}, t)$ 的面积, 则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2A(t)}{t^2} = \lambda_\infty(M), \tag{5.2.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L^2(t)}{2A(t)} = \lambda_\infty(M). \tag{5.2.3}$$

证明 假设 $M - \mathcal{C}$ 具有两个分支, 另一种情形可以类似证明. 由 Gauss-Bonnet 定理和定理 4.4.1 得, 对任意非特例值 t,

$$L'(t) = 2\pi\chi(B(\mathcal{C}, t)) - c(B(\mathcal{C}, t)) - \sum_k \left(2\tan\frac{\theta_k}{2} - \theta_k\right), \tag{5.2.4}$$

这里 θ_k 为在 $S(\mathcal{C}, t)$ 的割点处扇形的内角. 由命题 5.1.1 知, 对任意正数 ϵ, 存在 t_ϵ, 使得对任意非特例值 $t > t_\epsilon$,

$$\sum_k \left(2\tan\frac{\theta_k}{2} - \theta_k\right) < \epsilon. \tag{5.2.5}$$

一方面, 由定理 5.1.1, (5.2.4) 式和 (5.2.5) 式可得

$$2\pi\chi(M) - c(B(\mathcal{C}, t)) - \epsilon \leqslant L'(t) \leqslant 2\pi\chi(M) - c(B(\mathcal{C}, t)) \tag{5.2.6}$$

对任意的非特例值 $t > t_0(\epsilon) := \max\{R_1, t(\epsilon)\}$ 成立. 另一方面, $B(\mathcal{C}, t)$ 的面积为

$$A(t) = \int_0^t L(u)\mathrm{d}u. \tag{5.2.7}$$

由 (5.2.7) 式和引理 5.2.1 可得 (5.2.2). 由引理 5.1.1 知 $L(t)$ 在 $[R_1,\infty)$ 上绝对连续, 并由 (5.2.7) 式知 $A(t)$ 是 $[R_1,\infty)$ 上的 C^1 函数. 若 $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)=\infty$, 则由引理 5.2.1 可得 (5.2.3) 式. 假设 $\lim\limits_{t\to\infty} A(t):=A(\infty)$ 有限, 则由 (5.2.2) 式和 (5.2.7) 式得

$$0=\lim_{t\to\infty}\frac{2A(t)}{t^2}=\lambda_\infty(M),\ \liminf_{t\to\infty} L(t)=0. \tag{5.2.8}$$

于是由 (5.2.6) 式, 存在 $t_1(\epsilon)>t_0(\epsilon)$, 使得对任意非特例值 $t>t_1(\epsilon)$,

$$\mid L'(t)\mid < 2\epsilon. \tag{5.2.9}$$

由 (5.2.6) 式和 (5.2.9) 式, 对任意 $t_2>t_1>t_1(\epsilon)$,

$$\mid L^2(t_2)-L^2(t_1)\mid\leqslant 2\int_{t_1}^{t_2}\mid L(t)L'(t)\mid \mathrm{d}t<4\epsilon A(\infty). \tag{5.2.10}$$

因此由 (5.2.8) 式可知 $\lim\limits_{t\to\infty} L^2(t)$ 存在且等于 0. 故

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L^2(t)}{A(t)}=\lambda_\infty(M)=0.$$

证毕.

推论 5.2.1　存在正常数 R_2, 使得 $L(t)$ 在 $[R_2,\infty)$ 上局部 Lipschitz 连续. 进而, 若 $\lambda_\infty(M)$ 有限, 则 $L(t)$ 在 $[R_2,\infty)$ 上一致 Lipschitz 连续.

证明　由 (5.2.6) 式容易得到. 证毕.

以下假设 M 为光滑连通非紧无界的 2 维定向黎曼流形. 设 $\mathcal{M}_0(M)$ 为 M 上所有完备度量的集合, 使得对 $\mathcal{M}_0(M)$ 中的每个 g, 关于 g 的 Gauss 曲率 G_g 满足 $\mid G_g\mid\leqslant 1$. Gromov 在 [31] 中证明了对所有 $g\in\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^2)$, 面积 $A(\mathbb{R}^2,g)$ 的下确界大于 $4\pi+0.01$, 并且不大于 $(2+2\sqrt{2})\pi$. 同时他证明了若 $\chi(M)$ 非正, 则 $\inf\limits_{g\in\mathcal{M}_0(M)} A(M,g)=2\pi\mid\chi(M)\mid$. 作为定理 5.2.1 的应用, 我们将这些关于极小面积的结果推广为以下的定理.

定理 5.2.2　设 M 为连通定向非紧的有限连通无边光滑 2 维黎曼流形, $\mathcal{M}(M)$ 为 M 上所有完备黎曼度量的集合, 使得对每个 $g\in\mathcal{M}(M)$, 若 $\chi(M)\geqslant 0$, 则 $G_g\leqslant 1$; 若 $\chi(M)<0$, 则 $G_g\geqslant -1$. 则有

$$\inf_{g\in\mathcal{M}(M)} A(M,g)=\begin{cases}4\pi, & 若\ \chi(M)=1;\\ 2\pi\mid\chi(M)\mid, & 若\ \chi(M)\leqslant 0.\end{cases} \tag{5.2.11}$$

注 5.2.1　尚不清楚 $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^2)$ 的极小面积是否为 $(2+2\sqrt{2})\pi$. 解决这个问题有一定的困难.

证明 对于 $\chi(M)<0$ 的情形, 显然可由不等式

$$c(M,g)\geqslant\int_M G_g^- d(M,g)\geqslant -A(M,g) \tag{5.2.12}$$

证明, 其中 $G_g^- := \min\{G_g, 0\}$, $c(M,g)$ 和 $d(M,g)$ 分别表示黎曼流形 (M,g) 的全曲率和面积元. 由定理 5.2.1 知, 若 $A(M,g)$ 有限, 则

$$c(M,g)=2\pi\chi(M). \tag{5.2.13}$$

因此由 (5.2.12) 和 (5.2.13) 得

$$\inf_{g\in\mathcal{M}(M)} A(M,g)\geqslant 2\pi\mid\chi(M)\mid. \tag{5.2.14}$$

由于存在 $g\in\mathcal{M}(M)$, 使得 $A(M,g)<\infty$, $G_g\equiv 1$, 故不等式 (5.2.14) 成立.

若 $\chi(M)=0$, 则对每个正数 ϵ, 可以如下构造黎曼度量 $g_\epsilon\in\mathcal{M}(M)$, 使得 $A(M,g_\epsilon)<\epsilon$. 设 $(M,g:=\mathrm{d}t^2+m(t)^2\mathrm{d}\theta^2)$ 为同胚于柱面的旋转曲面, 其面积有限且 Gauss 曲率不大于 1. 定义一个新度量:

$$g_\epsilon:=\mathrm{d}t^2+m_\epsilon(t)^2\mathrm{d}\theta^2,$$

其中

$$m_\epsilon:=\frac{\epsilon}{2A(M,g)}m(t).$$

因为

$$A(M,g)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}m(t)\mathrm{d}t,\quad G_g=-\frac{m''}{m},$$

故有

$$A(M,g_\epsilon)=\frac{\epsilon}{2},\quad G_{g_\epsilon}=-\frac{m''}{m}\leqslant 1.$$

证毕.

以下两个引理对于证明定理 5.2.2 中 $\chi(M)$ 不小于 0 的情形很有帮助.

引理 5.2.2 (Sturm 比较定理) 设 $K_1(t)$ 和 $K_2(t)$ 为 $[0,\infty)$ 上的连续函数, $K_1(t)\geqslant K_2(t)$. 对每个 $K_i(t), i=1,2$, 设 $u_i(t)$ 为

$$u_i''(t)+K_i(t)u_i(t)=0$$

的解. 在 $t=0$ 处 $u_i(t)=0$, $u_i'(t)=1$. 若 a_1 和 a_2 分别表示 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 的在 $t=0$ 之后的第一个零点, 则 $a_2\geqslant a_1$, 且对任意的 $t\in[0,a_1]$,

$$u_2(t)\geqslant u_1(t).$$

证明 假设 $a_2 < a_1$, 则在 $(0, a_2)$ 上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{f(t)}{u_2^2}, \tag{5.2.15}$$

其中 $f(t) = u_1'u_2 - u_1u_2'$. 由于在 $[0, a_2]$ 上 $f'(t) = (K_2 - K_1)u_1u_2 \leqslant 0$, 且 $f(0) = 0$, 故 $f(t)$ 在 $[0, a_2]$ 上非正. 一方面, 由 (5.2.15) 知 u_1/u_2 在 $(0, a_2)$ 上单调不增; 另一方面,

$$\lim_{t \to +0} \frac{u_1}{u_2} = \lim_{t \to +0} \frac{u_1'}{u_2'} = 1. \tag{5.2.16}$$

于是对任意的 $t \in [0, a_2]$,

$$u_1(t) \leqslant u_2(t). \tag{5.2.17}$$

特别地, $u_1(a_2) \leqslant u_2(a_2) = 0$. 这与假设 $a_2 < a_1$ 矛盾, 因此 $a_2 \geqslant a_1$. 由以上的讨论知第二个结论是平凡的. 证毕.

引理 5.2.3 对每个满足 $A(\mathbb{R}^2, g) < \infty$ 的 $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, 存在点 p_0 和 R, 使得 p_0 处的 R-度量球 $B(p_0, R)$ 的面积大于 4π.

证明 由于全曲率 $c(\mathbb{R}^2, g)$ 存在, 由 (5.2.2) 式可知 $c(\mathbb{R}^2, g) = 2\pi$. 因此由定理 3.8.5 可知每个 Busemann 函数是一个穷举函数. 特别地, 它能取到极小值. 设 p_0 为 Busemann 函数的一个极小值点, 则对 p_0 处的每个单位向量 v, 存在由 p_0 出发的射线 σ, 使得 $\langle \dot{\sigma}(0), v \rangle \geqslant 0$. 否则, 存在 Busemann 函数 F_γ, 其中 γ 是射线, 且存在从 p_0 出发的测地线 α, 使得存在梯度向量 $\nabla F_\gamma(\alpha(t))$, 对几乎所有充分小的 $t > 0$, 有 $\langle \nabla F_\gamma(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle < 0$. 注意到 F_γ 为 Lipschitz 连续. 由于对几乎所有充分小的 $t > 0$, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)F_\gamma(\alpha(t)) = \langle \nabla F_\gamma(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle$ 非负, 故 $F_\gamma(p_0)$ 非极小值. 因此存在至少两个不同的从 p_0 出发的射线. 设 V 为从 p_0 出发的射线上所有点的集合. 记

$$\bigcup_i U_i = \mathbb{R}^2 \setminus V,$$

其中 U_i 为 $\mathbb{R}^2 \setminus V$ 的分支. 对每个 i, ∂U_i 由两条不同的射线组成, 并且 ∂U_i 在 p_0 处的内角不大于 π. 每个 U_i 不包含从 p_0 出发的射线, 但包含 $C(p_0)$ 的一个分支, 即 p_0 的迹. 设 (r, θ) 为 p_0 处的测地极坐标, 则在 p_0 的邻域内 $g = \mathrm{d}r^2 + m^2\mathrm{d}\theta^2$, 其中 $m = m(r, \theta)$ 是

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} m + G_g m = 0 \tag{5.2.18}$$

的解, $m(0, \theta) = 0$, $(\partial/\partial r)m(0, \theta) = 1$. 由于 $G_g \leqslant 1$, 由引理 5.2.2 知, 对任意的 $r \in (0, \pi)$,

$$m(r, \theta) \geqslant \sin r. \tag{5.2.19}$$

因此, 若 p_0 处的单射半径 $i(p_0)\geqslant\pi$, 则结论直接从 (5.2.19) 得出. 若 $i(p_0)<\pi$, 则对某个 i 存在点 $p'\in C(p_0)\bigcap U_i$, 使得 $d(p_0,p')<\pi$. 设 $p_1\in C(p_0)\bigcap U_i$ 是使得 $d(p_0,p_1)=d(p_0,C(p_0)\bigcap U_i)=:a_0$ 的点, 则由引理 4.3.4, 存在 p_0 处长度为 $2a_0$ 的测地回路 γ_0, 使得 $\gamma_0(a_0)=p_1$, 且 $\gamma_0(0,2a_0)$ 包含在 U_i 中. 测地回路 γ_0 围成 U_i 中的 2 维圆盘 D_0, 且 D_0 在 p_0 处的内角 α_0 小于 π, 因此 D_0 是凸的. 由 $a_0<\pi$, $\alpha_0<\pi$ 知存在点 $q\in C(p_1)\bigcap D_0$, 使得 $d(p_1,q)<d(p_1,p_0)$, 因此存在 $D_0\bigcap C(p_1)$ 中的点 p_2, 使得 $d(p_1,p_2)=d(p_1,C(p_1)\bigcap D_0)<d(p_0,p_1)$. 记 $a_1:=d(p_1,p_2)$, 存在 D_0 中长度为 $2a_1$ 的测地回路 γ_1, 使得 γ_1 围成 2 维圆盘 D_1, D_1 在 p_1 处的内角小于 π. 重复这一过程, 最终可得到 D_0 中的简单闭测地线 γ, 其长度为 $\lim\limits_{j\to\infty}a_j$, 且围成 D_0 中的 2 维圆盘 D. 由 Gauss-Bonnet 定理知, $c(D,g)=2\pi$. 特别地, 由假设 $G_g\leqslant 1$ 知 $A(D,g)\geqslant 2\pi$. 以上讨论说明若存在 $C(p_0)\bigcap U_i$ 中的点 q, 使得 $d(p_0,q)<\pi$, 则存在正数 R, 使得 $A(B(p_0,R)\bigcap U_i,g)>2\pi$. 因此, 对某个正数 R, 若存在 U_i 的至少两个分支容许 $q\in C(p_0)\bigcap U_i, d(q,p_0)<\pi$, 则有 $A(B(p_0,R),g)>4\pi$. 若存在唯一的 U_i, 使得 $d(U_i\bigcap C(p_0),p_0)<\pi$, 则由 (5.2.19) 知 $A(B(p_0,\pi)-U_i,g)\geqslant 2(2\pi-\theta)$, 其中 θ 为 U_i 在 p_0 处内角. 于是对某个 $R\geqslant\pi$, 有

$$A(B(p_0,R),g)>2\pi+2(2\pi-\theta)\geqslant 4\pi.$$

证毕.

对于 $\chi(M)$ 不小于 0 的情形, 可通过证明对任意正数 ϵ, 存在 $g_\epsilon\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, 使得 $A(\mathbb{R}^2,g)<4\pi+\epsilon$ 来证明定理 5.2.2. 设 $y=f(x), x\geqslant 0$ 为等切面曲线方程, $f(0)=1$ (见图 5.2.1). 对于给定的正数 ϵ, 存在小的正数 η, 使得 E^3 中绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积小于 $\epsilon/2$, 其中该轮廓线为 $y=\eta f(x)$. 在 E^3 中以原点为

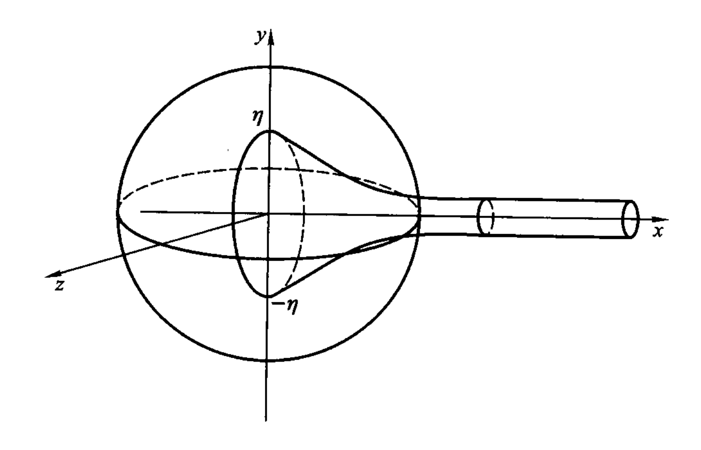


图 5.2.1

中心的单位球面 S^2 上挖去一个以 $(1,0,0)$ 为中心的小球, 然后将上述旋转曲面的一部分粘合到小洞上, 使得所得 C^0-曲面的全面积小于 $4\pi+2\epsilon/3$. 该曲面可由诱导度量的 Gauss 曲率不大于 1 的光滑曲面逼近得到, 于是证得定理 5.2.2.

§3 M 无限连通的情形

本节将对定理 5.2.1 推广到 M 为无限连通流形的情形. 因此, 本节中假设 M 为连通、无限连通的完备光滑无边的 2 维黎曼流形, 且容许全曲率. 由定理 2.2.2, M 的全曲率 $c(M)$ 为 $-\infty$. 我们所研究拓扑的关键点是理解 $\lambda_\infty(M)$ 的值以给出无限连通的 M 的自然意义, 这个值只依赖于定义了全曲率的黎曼度量. 为此, 我们将 M 分解为 M 的子流形 M_j 的序列 $\{M_j\}$, 其中的每个 M_j 满足以下四条性质:

(1) M_j 具有非空紧致边界, 完备且有限连通.

(2) ∂M_j 的每个分支非零同伦于简单闭测地线.

(3) $\{M_j\}$ 关于 j 严格单调递增, 且 $\lim\limits_{j\to\infty} M_j = M$.

(4) M_j 的 Euler 示性数序列 $\{\chi(M_j)\}$ 严格单调递减.

我们称这样的 $\{M_j\}$ 为 M 的有限连通子流形的滤过, 这种 M 的滤过实际上在定理 2.2.2 的证明中已经给出. 我们将在以下的定理 5.3.1 中证明序列 $\{\lambda_\infty(M_j)\}$ 为单调不减的非负数序列, 且极限

$$s(M) := \lim_{j\to\infty} \lambda_\infty(M_j) \tag{5.3.1}$$

不依赖于滤过的选取, 极限 $s(M)$ 取值于 $[0,\infty)$ 之中, 并且只依赖于端的黎曼度量.

定理 5.3.1 设 M 为连通且无限连通的完备光滑 2 维黎曼流形. 设 $\{M_j\}$ 为 M 的有限连通子流形的滤过. 对每个 M_j, 记

$$s_j := \lambda_\infty(M_j),$$

则 $\{s_j\}$ 为不减的非负数序列, 且 $s(M) := \lim\limits_{j\to\infty} s_j$ 不依赖于 M 的滤过的选取, 而只依赖于端的黎曼度量.

证明 取 M 上的任意光滑 Jordan 曲线 $\mathcal{C}$, 使得 $\mathcal{C}\subset M_1$. 对每个 j 和每个非特例值 t, 设 $L_j(t)$ 为 $S(\mathcal{C},t)\bigcap M_j$ 的长度, 由定理 5.2.1 得

$$s_{j+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{L_{j+1}(t)}{t} \geqslant s_j = \lim_{t\to\infty}\frac{L_j(t)}{t}.$$

因此序列 $\{s_j\}$ 单调不减, 设 $\{\tilde{M}_h\}$ 为 M 的有限连通子流形的另一个滤过. 记

$$\tilde{s}_h := \lambda_\infty(M_h).$$

从 $\{\tilde{M}_h\}$ 中任取 $\tilde{M}_h$. 由 M 的滤过的性质, 存在 M_j 使得 $\tilde{M}_h \subset M_j$, 因此 $\lim\limits_{h\to\infty} \tilde{s}_h \leqslant \lim\limits_{j\to\infty} s_j$. 这表明 $\lim\limits_{h\to\infty} \tilde{s}_h = \lim\limits_{j\to\infty} s_j$. 证毕.

假设对任意的 $t > 0$, $L(t)$ 为通过 (4.4.8) 式作延拓得到的函数, 则 $B(C,t)$ 的面积为

$$A(t) = \int_0^t L(t)\mathrm{d}t. \tag{5.3.2}$$

于是以下的引理是平凡的.

引理 5.3.1 记

$$\bar{\alpha} := \limsup_{t\to\infty} \frac{L(t)}{t}, \qquad \underline{\alpha} := \liminf_{t\to\infty} \frac{L(t)}{t},$$
$$\bar{\beta} := \limsup_{t\to\infty} \frac{2A(t)}{t^2}, \qquad \underline{\beta} := \liminf_{t\to\infty} \frac{2A(t)}{t^2},$$

则有

$$\bar{\alpha} \geqslant \bar{\beta} \geqslant \underline{\beta} \geqslant \underline{\alpha} \geqslant s(M).$$

定理 5.3.2 设 M 为完备的无限连通光滑 2 维黎曼流形, 且容许全曲率. 对于光滑 Jordan 曲线 C 和非特例值 t, 设 $L(t)$ 和 $A(t)$ 分别为 $S(C,t)$ 的长度和 $B(C,t)$ 的面积, 则有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{L(t)}{t} \geqslant s(M), \tag{5.3.3}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{2A(t)}{t^2} \geqslant s(M), \tag{5.3.4}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{L^2(t)}{A(t)} \geqslant 2s(M). \tag{5.3.5}$$

证明 不等式 (5.3.3) 和 (5.3.4) 是平凡的. 为证明 (5.3.5), 我们假设 $s(M) > 0$, 则由引理 5.3.1 知 $\bar{\beta}$ 是正的. 假设 $\bar{\alpha}$ 有限, 设 $\{t_n\}$ 为单调发散序列, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} L(t_n)/t_n = \bar{\alpha}$. 则由引理 5.3.1 得

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L^2(t_n)}{2A(t_n)} \geqslant \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\beta}} \geqslant \bar{\alpha} \geqslant s(M).$$

于是若 $\bar{\alpha}$ 有限, 则 (5.3.4) 成立. 假设 $\bar{\alpha}$ 无限, 则对每个正整数 n, 存在 t_n, 使得

$$t_n := \inf\left\{t > 0; \frac{L(t)}{t} \geqslant n\right\}.$$

序列 $\{t_n\}$ 单调发散. 由 t_n 的选取知, 对所有 $t < t_n$,

$$\frac{L(t)}{t} < n. \tag{5.3.6}$$

由于 $L(t)$ 在每个 t 处右连续, 故

$$\frac{L(t_n)}{t_n} \geqslant n. \tag{5.3.7}$$

因此由 (5.3.2), (5.3.6) 和 (5.3.7) 知

$$A(t_n) < n\int_0^{t_n} t\mathrm{d}t \leqslant \frac{n}{2}\left(\frac{L(t_n)}{n}\right)^2 = \frac{L(t_n)^2}{2n}. \tag{5.3.8}$$

由不等式 (5.3.8) 可得 (5.3.5). 证毕.

我们将给出三个例子, M_1, M_2 和 M_3. 它们是嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的全曲率为 $-\infty$ 的完备无限连通曲面. 由这些例子可以看到 (5.3.3), (5.3.4) 和 (5.3.5) 是最优的. 点 $p \in \mathbb{R}^3$ 可以表示为坐标 (x, y, z) 的典范集 $p = (x(p), y(p), z(p))$. 对于常数 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 记 $\Pi_{ax+by+cz} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$.

例 5.3.1　选定 $l > 3$, $\theta \in (0, \pi/4)$. 关于 Π_x 对称的集合 $W \subset \Pi_z$ 定义为以下三个集合的并集 (见图 5.3.1) :

$$\{(0, y, 0); -1 \leqslant y \leqslant 0\};$$
$$\{(x, y, 0); y = | x | \cot\theta\};$$

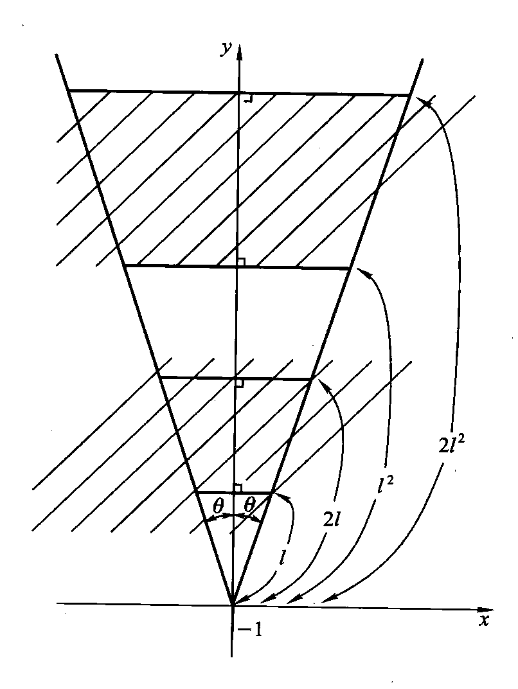


图 5.3.1

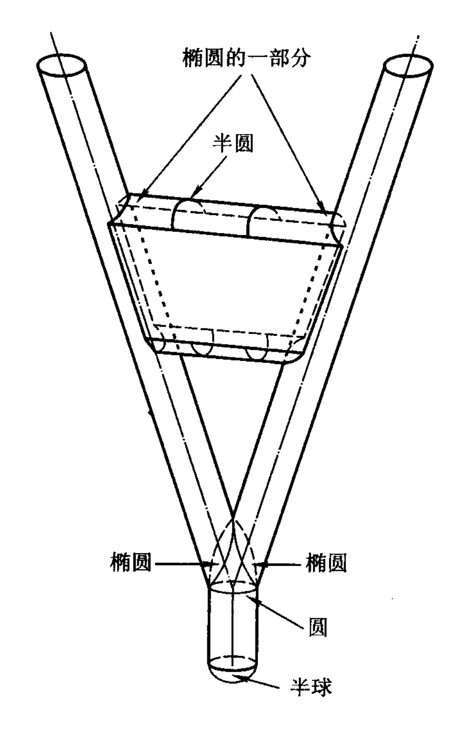


图 5.3.2　区域 $\partial B(W,\epsilon)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{p\in\Pi_z; l^n\cos\theta\leqslant y(p)\leqslant 2l^n\cos\theta, \mid x(p)\mid\leqslant y(p)\tan\theta\}.$$

对充分小的 $\epsilon>0$, 设 $B(W,\epsilon)$ 为 W 处的 ϵ-球, 且 $\partial B(W,\epsilon)$ 为这个 $\mathbb{R}^3$ 中的球的边界. $\partial B(W,\epsilon)$ 的边界是无限连通的拓扑曲面, 具有唯一一个几乎处处光滑的端. $\partial B(W,\epsilon)$ 上的非光滑点组成椭圆上一部分的并集, 具有邻域 $U\subset\partial B(W,\epsilon)$, 可以由以下性质渐近得到完备光滑曲面 $M_1\subset\mathbb{R}^3$:

(i) $\partial B(W,\epsilon)\setminus U$ 完全包含于 M_1 中, 且若 $U_1:=M_1\setminus(\partial B(W,\epsilon)\setminus U)$, 则在 U_1 的任意分支内 Gauss 曲率 G 不变号.

(ii) 若 $D:=\left\{p\in M_1; y(p)\leqslant-\dfrac{1}{2}\right\}$, 则 D 由一个圆盘和一个由凸冠与平坦圆柱面粘合而成的旋转曲面构成, 且 $\partial D:=\mathcal{C}$ 是闭测地线.

(iii) 在 $M_1\setminus D$ 上 $G\leqslant 0$, 在包含于 $U_1\setminus D$ 的开集中 $G<0$.

(iv) M_1 关于 Π_z 和 Π_x 对称.

$\mathcal{C}$ 的割迹可以描述为, $\mathcal{C}$ 关于 Π_z 和 Π_x 对称因而是 $\mathcal{C}$ 的割迹. 记 $p:=(0,-1-\epsilon,0)\in\Pi_x\bigcap\Pi_z\bigcap M_1$, 设 N 为沿 $\mathcal{C}$ 的单位法向量场, 使得 $N=\partial/\partial y$. 若测地线 $\gamma_0:\mathbb{R}\to M_1$ 满足 $\gamma_0(0)=p$, $\gamma(\mathbb{R})$ 在 Π_z 中并且关于 Π_x 对称, 则 $\gamma_0\mid_{[0,\infty)}$

和 $\gamma(-\infty,0]$ 都是从 p 出发的射线, 且它们从 $M_1\backslash D$ 中 C 上的点出发的子射线为 C-射线. 不存在除 γ_0 的子射线之外的 C-射线. C 的所有割点的集合为

$$\{p\}\bigcup(M_1\bigcap(\Pi_x\bigcup\Pi_z)\setminus(D\bigcup\gamma_0(\mathbb{R}))).$$

命题 5.3.1 设 $M_1\subset\mathbb{R}^3, C\subset M_1$ 如上定义, 则以下结论成立:

(1) M_1 容许全曲率, 且 $s(M_1)=0$.

(2) $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{L(t)}{t}=s(M_1)=0$.

(3) $\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{2A(t)}{t^2}>s(M_1)$.

证明 (1) 显然可由 M_1 的构造得到. 由于 C 在 Π_x 和 Π_z 中对称, 故 C 的割迹和 $S(C,t)$ 在 Π_x 和 Π_z 中也对称. 注意到 M_1 上的距离函数可由 $W\subset\Pi_z$ 上的距离函数逼近. 对 $n=1,2,\cdots$, 记

$$X_{2n-1}:=(l^n\sin\theta,l^n\cos\theta,0),\quad X_{2n}:=(2l^n\sin\theta,2l^n\cos\theta,0),$$
$$Q_{2n-1}:=(0,l^n\cos\theta,0),\quad Q_{2n}:=(0,2l^n\cos\theta,0).$$

C 上的点可以表示为

$$\left(\epsilon\cos\frac{s}{\epsilon},-\frac{1}{2},\epsilon\sin\frac{s}{\epsilon}\right),\quad 0\leqslant s\leqslant L_0=2\pi\epsilon.$$

对 $L(t)$ 和 $A(t)$ 作如下估计, 若 $t\in\left(l^n+\dfrac{1}{2},l^n(1+\sin\theta)+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $S(C,t)$ 有两个分支且右半边可以由 Π_z 中以 X_{2n-1} 为圆心半径为 $t-l^n-\dfrac{1}{2}$ 的圆的两部分来逼近, 这两部分在 X_{2n-1} 处所成的角为 $\angle(X_{2n},X_{2n-1},Q_{2n-1})=\dfrac{1}{2}\pi+\theta$. 因此

$$L(t)=4\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\left(t-l^n-\frac{1}{2}\right),$$
$$A(t)>2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\left(t-l^n-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}(3\sin2\theta)l^{2i}.$$

若 $t\in\left(l^n(1+\sin\theta)+\dfrac{1}{2},l^n(1+\cos\theta)+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $S(C,t)$ 连通于 Π_x 在线段 $\overline{Q_{2n-1}Q_{2n}}$ 附近的非光滑点. 因此

$$L(t)=4\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\phi_t\right)\left(t-l^n-\frac{1}{2}\right),$$

且

$$A(t)>2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)(l^n\sin\theta)^2+\sum_{i=1}^{n-1}(3\sin2\theta)l^{2i}.$$

这里我们记

$$\cos\phi_t := l^n \frac{\sin\theta}{t - l^n - \dfrac{1}{2}} \in [\tan\theta, 1].$$

若 $t \in \left(l^n(1+\cos\theta)+\dfrac{1}{2}, 2l^n+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $S(\mathcal{C},t)$ 具有三个分支, 记

$$\cos\frac{\psi_t}{2} := l^n \frac{\cos\theta}{t - l^n - \dfrac{1}{2}},$$

则有

$$L(t) = 4\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\psi_t-\phi_t\right)\left(t-l^n-\frac{1}{2}\right),$$

且

$$A(t) > 2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)(l^n\sin\theta)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(3\sin 2\theta)l^{2i}.$$

若 $t \in \left(2l^n+\dfrac{1}{2}, l^{n+1}+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $S(\mathcal{C},t)$ 在半径为 ϵ 的平柱面中有两个分支, $L(t) = 4\pi\epsilon$, $A(t) > \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3\sin 2\theta)l^{2i}$. 则命题中的 (2) 容易从以下式子得出:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{L(2l^n+1)}{2l^n+1} = 0.$$

对每个 $n = 1, 2, \cdots$ 和 $t \in \left(l^n+\dfrac{1}{2}, l^{n+1}+\dfrac{1}{2}\right)$, 可以找到一个函数给出 $A(t)/t^2$ 的下界. 于是

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{A(t)}{t^2} \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(3\sin 2\theta)l^{2i}}{\left(l^{n+1}+\dfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sin 2\theta}{l^2(l^2-1)} > 0.$$

证毕.

例 5.3.2 我们构造一个 $M_2 \subset \mathbb{R}^3$ 中的例子来证明若将 $\liminf\limits_{t\to\infty} L(t)^2/A(t)$ 替换为 $\limsup\limits_{t\to\infty} L(t)^2/A(t)$, 则 (5.3.5) 式不成立. 这样的 M_2 可以通过连接 $M_1 \setminus D$ 和沿 C 的管 V 来得到. 管 V 如下构造, 对命题 5.3.1(3) 中的 $A(t)$, 设 $\underline{\beta} := \liminf\limits_{t\to\infty} A(t)/t^2$. 对正数 c, 设 $\alpha \in (0, 2\pi)$ 满足

$$\frac{2\alpha}{\alpha+\underline{\beta}} \leqslant c.$$

V 是绕 y 轴的旋转曲面, 使得 $\{q \in V; y(q) \geqslant -1\}$ 是半径为 ϵ 的平柱面, 且 $c(V) = -\alpha$; 见图 5.3.3. 则 M_2 无限连通, 具有两个端, 且 $s(M_2) = \alpha$. 若 $L_V(t)$ 和 $L_M(t)$ 分别为 $S(\mathcal{C}, t) \bigcap V$ 和 $S(\mathcal{C}, t) \bigcap (M_1 \setminus D)$ 的长度, 且 $A_V(t)$ 和 $A_M(t)$ 分别为 $B(\mathcal{C}, t) \bigcap V$ 和 $B(\mathcal{C}, t) \bigcap (M_1 \setminus D)$ 的面积, 则有 $A(t) = A_V(t) + A_M(t)$, 且

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L_V(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2A_V(t)}{t^2} = \alpha.$$

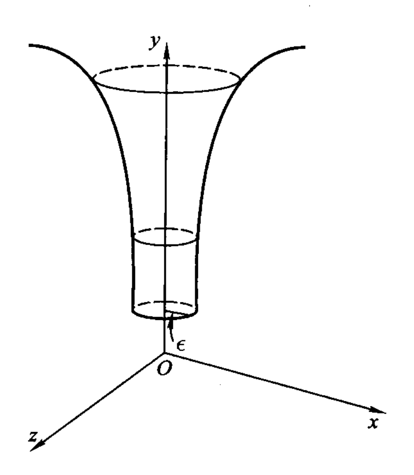


图 5.3.3 旋转曲面 V

因此

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{L(t)^2}{A(t)} = \liminf_{t \to \infty} \frac{(L_V(t) + L_M(t))^2}{A_V(t) + A_M(t)} \leqslant \frac{2\alpha^2}{\alpha + \underline{\beta}} \leqslant cs(M_2).$$

这样便证明了:

命题 5.3.2 对每个 $c > 0$, 存在一个容许全曲率的完备无限连通曲面 $M_2 \subset \mathbb{R}^3$, $s(M_2) \in (0, 2\pi)$ 且 M_2 中有简单闭曲线 $\mathcal{C}$, 使得 $\liminf_{t \to \infty} L(t)^2/A(t) \leqslant cs(M_2)$.

例 5.3.3 前面的例子表明存在 $M_3 \subset \mathbb{R}^3$ 和 M_3 中的简单闭曲线 $\mathcal{C}$, 使得 (5.3.3), (5.3.4) 和 (5.3.5) 中的等号成立. 取定 $l > 3$ 和 $\epsilon \in (0, 1/2)$, 使得

$$A(t) := \sum_{n=1}^{\infty} (\epsilon l)^n < \infty.$$

设 $W \subset \Pi_z$ (见图 5.3.4) 定义为

$$W := \{p \in \Pi_z \textstyle\bigcap \Pi_y; \mid x(p) \mid \geqslant l\} \bigcup \{p \in \Pi_z \bigcap \Pi_x; \mid y(p) \mid \geqslant l\}$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{p \in \Pi_z; \mid x(p) \mid + \mid y(p) \mid = l^n\}.$$

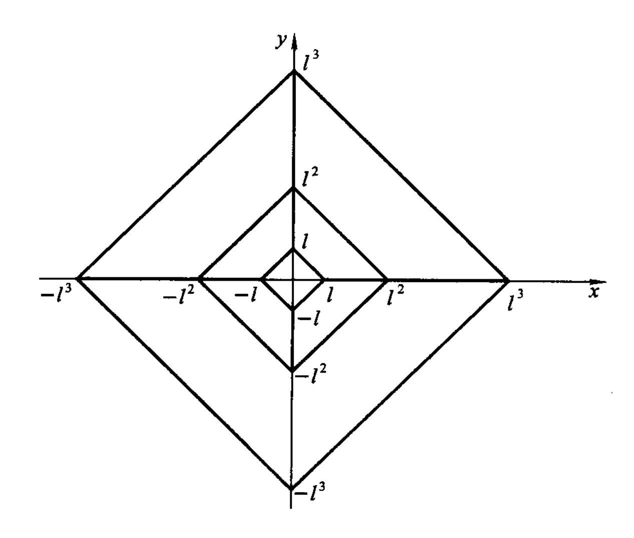


图 5.3.4　区域 W

设光滑函数 $f:(l-1,\infty)\longrightarrow(0,\epsilon]$ 满足对 $l^n-1\leqslant t\leqslant l^n+1$, $f(t)=\epsilon^n$, 且对 $l^n+1<t<l^{n+1}-1$, $f'(t)\in(-\epsilon^n/l^n,0)$. 设 $B(W)\subset\mathbb{R}^3$ (见图 5.3.5) 定义为以下三个集合的并集:

$$\{q\in\mathbb{R}^3;\mid x(q)\mid\geqslant l, y(q)^2+z(q)^2\leqslant f(x(q))^2\};$$
$$\{q\in\mathbb{R}^3;\mid y(q)\mid\geqslant l, x(q)^2+z(q)^2\leqslant f(y(q))^2\};$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q\in\mathbb{R}^3; d_n(q)\leqslant\epsilon^n\}.$$

这里 $d_n(q)$ 为 q 到 Π_z 中的矩形 $\mid x\mid+\mid y\mid=l^n$ 的距离.

由例 5.3.1 中的相同方法可知, $\mathbb{R}^3$ 中 $B(W)$ 的边界 $\partial B(W)$ 可通过下列性质由光滑曲面 M_3 逼近:

(1) $\partial B(W)\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{B_{4\epsilon^n}(0,\pm l^n,0)\bigcup B_{4\epsilon^n}(\pm l^n,0,0)\}$ 完全包含于 M_3 中.

(2) 四个分支 $B_{4\epsilon^n}(0,\pm l^n,0)\bigcap M_3$ 和 $B_{4\epsilon^n}(\pm l^n,0,0)\bigcap M_3$ 同余, 并且对所有的 $n=1,2,\cdots$ 有非正曲率.

(3) M_3 关于 Π_x, Π_y, Π_z, Π_{x+y} 和 Π_{x-y} 对称.

由构造可知 M_3 具有非正 Gauss 曲率, 于是容许全曲率, 且 $s(M_3)=0$. M_3 的全面积的上界由下式给出:

$$8\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}(l^{n+1}-l^n)\epsilon^n+\sqrt{2}l^n\epsilon^n\right)=8\pi A(l-1+\sqrt{2}).$$

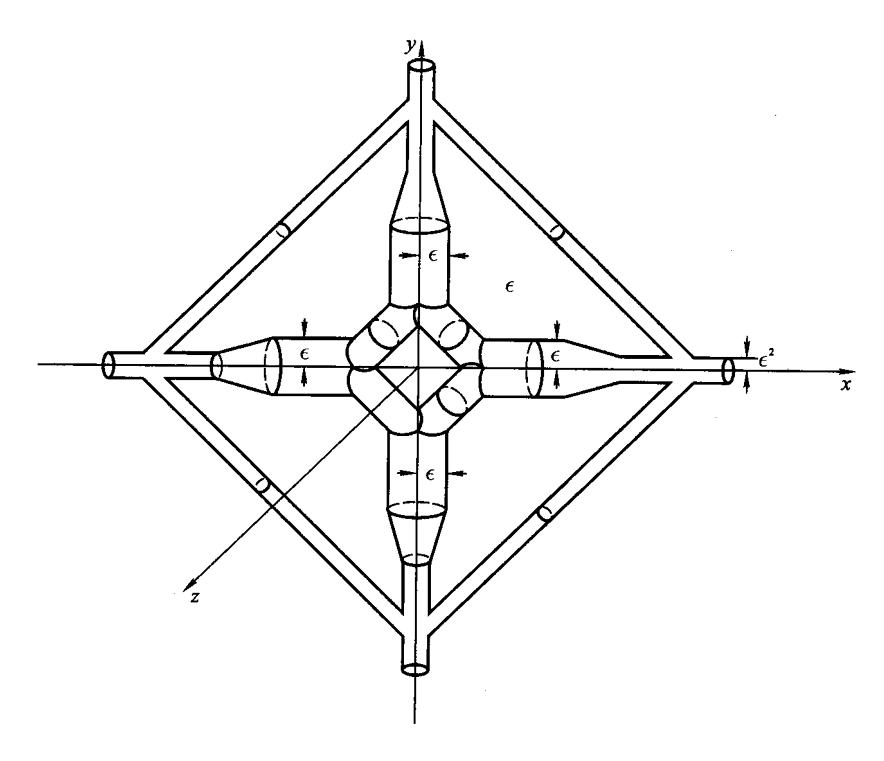


图 5.3.5 区域 $B(W)$

设 $\mathcal{C} \subset M_3$ 是 Π_z 中长度为 $L_0 < 4\sqrt{2}l$ 的闭测地线, 并且关于 Π_x, Π_y, Π_z, Π_{x+y} 和 Π_{x-y} 对称. 恰好存在八条 $\mathcal{C}$-射线, 它们的像在 Π_x 和 Π_y 中. $\mathcal{C}$ 的割迹为 $(\Pi_z \bigcup \Pi_{x-y} \bigcup \Pi_{x+y}) \bigcap (M_3 \setminus \mathcal{C})$. 若 $t \in (l^n, l^n(1+1/\sqrt{2}))$, 则 $S(\mathcal{C}, t)$ 具有十二个分支, 且 $24\pi\epsilon^n \leqslant L(t) \leqslant 24\pi\epsilon^{n-1}$. 若 $t \in (l^n(1+1/\sqrt{2}), l^{n+1})$, 则 $S(\mathcal{C}, t)$ 具有四个分支, 且 $8\pi\epsilon^n \leqslant L(t) \leqslant 8\pi\epsilon^{n-1}$. 于是证明了:

命题 5.3.3 假设 M_3 和 $\mathcal{C}$ 如以上描述, 则有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{L(t)}{t} = \liminf_{t\to\infty} \frac{2A(t)}{t^2} = \limsup_{t\to\infty} \frac{L(t)^2}{2A(t)} = s(M_3).$$

第六章　射线质量

在第五章中我们介绍了全曲率的存在性在距离圆的结构上附加了一些较强的限制条件. 本章中我们将看到完备有限连通的 2 维开黎曼流形的全曲率对由任意点出发的射线的质量附加了限制. 关于全曲率和射线质量之间关系的最初结果是由 Maeda 在 [51] 中证明的. 在 [76] 中, Shiga 将这一结果推广到了 Guass 曲率变号的情形. Oguchi, Shiohama, Shioya 和 Tanaka 在 [62,83,84,90] 中对射线质量与全曲率的关系进行了深入研究, Shioya 还对射线质量与具有非负曲率的高维空间的理想边界的关系进行了研究 (参见[90]).

§1　预备知识; 从一个固定点出发的射线的质量

设 M 为有限连通、完备光滑的连通 2 维黎曼流形. 若 M 不包含直线 (见定义 2.2.1), 则它恰有一个端.

引理 6.1.1　假设 M 不包含直线, 则对 M 的每个紧致子集 K, 存在数 $R(K)$, 使得若 $q \in M$ 满足 $d(q,K) > R(K)$, 则不存在从 q 出发且通过 K 中任意一点的射线.

证明　假设存在 M 的紧致子集 K 和 M 中的发散点列 $\{q_j\}$, 使得对每个 q_j, 存在从 q_j 出发且通过 K 的射线 γ_j. 设 p_j 为 γ_j 和 K 的交点, 由于 K 紧致, 故 $\{p_j\}$ 有收敛子列 $\{p_{j_k}\}$, 因为 p_{j_k} 处 γ_{j_k} 的单位速度向量序列 $\{v_{j_k}\}$ 具有收敛子列, 故 $\{\gamma_j\}$ 具有通过 K 的极限测地线 γ. 因为 $\{q_j\}$ 发散, 故 γ 为直线, 这与引理的假设矛盾. 证毕.

若 M 容许全曲率, 对 M 的每个 Borel 子集 F, 记 F 的全曲率为 $c(F)$, 即

$$c(F) := \int_F G\mathrm{d}M.$$

对 M 的每个柱心 K (见定义 2.1.2) 和每条与 K 相交的射线或直线 $\gamma : I \to M$, 其中 $I = [0, \infty)$ 或 $\mathbb{R}$, 定义两个数 $t(\gamma)$ 和 $s(\gamma)$:

$$t(\gamma) := \max\{t \in I; \gamma(t) \in K\}, \quad s(\gamma) := \min\{t \in I; \gamma(t) \in K\}.$$

由定理 3.7.3 可得:

引理 6.1.2 假设 M 恰有一个端, 若 M 包含直线并且容许全曲率, 则

$$\lambda_\infty(M) \geqslant 2\pi.$$

引理 6.1.3 假设 α, β 是从一个公共点 p 出发的两条不同射线, 它们围成的区域 D 中不包含从 p 出发的射线. 若 M 容许全曲率, 则

$$c(D) = 2\pi(\chi(D) - 1) + \theta,$$

其中 θ 为 D 在 p 处的内角. 特别地, 若 D 同胚于平面, 则 $c(D) = \theta$.

证明 选取小于 p 点单射半径的正常数 ϵ, 则 $\mathcal{C} := \{\exp_p \in v; v \in T_pM, \| v \| = 1\}$ 为 M 上的光滑 Jordan 曲线, 且对每个 $t > \epsilon$,

$$S(p, t) = S(\mathcal{C}, t - \epsilon).$$

因此由定理 4.4.1, 存在 D 中 p 的正规割点的序列 $\{q_j\}$, 使得 $\{d(p, q_j)\}$ 严格单调递增; 存在关于 $S(\mathcal{C}, t)$ 的非特例值的发散序列; 并使得连接 p 和 q_j 的两条不同的极小测地线 α_j 和 β_j 所围成的区域 D_j 组成一个严格单调递增序列. 由于 D 中不存在从 p 出发的射线, 故 $\lim\limits_{j\to\infty} D_j = D$, 且可以假设 $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha$, $\lim\limits_{j\to\infty} \beta_j = \beta$; 见图 6.1.1. 设 θ_j 和 ξ_j 分别为 D_j 在 p 和 q_j 处的内角, 则由命题 5.1.1, $\lim\limits_{j\to\infty} \theta_j = \theta$, $\lim\limits_{j\to\infty} \xi_j = 0$. 对 D_j 应用 Gauss-Bonnet 定理得

$$c(D_j) = 2\pi(\chi(D_j) - 1) + \theta_j + \xi_j. \tag{6.1.1}$$

由于 $\lim\limits_{j\to\infty} D_j = D$, 故对充分大的 j,

$$\lim_{j\to\infty} c(D_j) = c(D), \quad \chi(D_j) = \chi(D). \tag{6.1.2}$$

因而由 (6.1.1) 和 (6.1.2) 可得

$$c(D) = 2\pi(\chi(D) - 1) + \theta.$$

证毕.

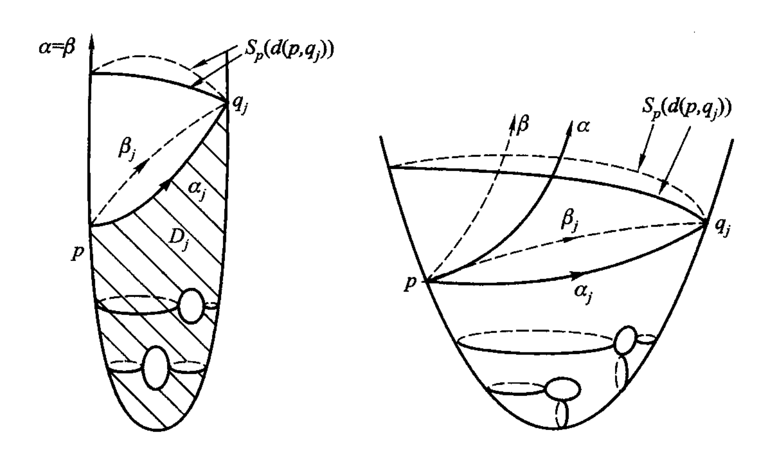


图 6.1.1 左边为 $\alpha=\beta$ 情形; 右边为 $\alpha\neq\beta$.

引理 6.1.4 若存在从 p 点出发的唯一射线, 并且 M 容许全曲率, 则 M 恰有一个端, 且 $\lambda_\infty(M)=0$.

证明 由于 $M(\infty)$ 只包含一个点, 故引理的结论是平凡的. 证毕.

由定理 3.7.4 可得:

引理 6.1.5 假设 M 恰有一个端, 若 M 不包含直线, 并且容许全曲率, 则 M 满足 $\lambda_\infty(M)\leqslant 2\pi$.

定义 6.1.1 设 A_p 为从点 p 出发的射线的所有单位切向量的集合, 用 μ 表示全测度是 2π 的单位圆 $S_pM:=\{v\in T_pM;\|v\|=1\}$ 上的 Lebesgue 测度.

定理 6.1.1 设 M 为任意有限连通, 完备光滑的 2 维连通黎曼流形, 且容许全曲率 $c(M)$. 则有

$$\mu(A_p)=2\pi\chi(M)-c(M\setminus F_p), \tag{6.1.3}$$

这里

$$F_p:=\{\exp_p tu;u\in A_p,t\geqslant 0\}. \tag{6.1.4}$$

证明 首先 A_p 是可测的. 由于 M 中射线序列的极限也是射线, 故 A_p 是闭的, 于是为 S_pM 的可测子集. 取 M 的柱心 $B:=\{q\in M;d(p,q)\leqslant t_1\}$ 如同 §2.1 中的定义 (这里采用 §2.1 的某些记号). 记 $T>t_1$ 为充分大的非特例值, 使得 $S(p,T)$ 由 k 条分段光滑的闭曲线 $C^{(i)}$, $i=1,\cdots,k$ 组成; $C^{(i)}$ 的不可微点 $x_m^{(i)}(1\leqslant m\leqslant m(i))$ 由两条不同的极小测地线 $\alpha_m^{(i)}$ 和 $\beta_m^{(i)}$ 连接到 p, 且 $\alpha_m^{(i)}(0)=\beta_m^{(i)}(0)=p$, $\alpha_m^{(i)}(T)=\beta_m^{(i)}(T)=x_m^{(i)}$, $1\leqslant m\leqslant m(i)$; 见图 6.1.2. 由定理 4.4.1 知这是可以实现的. 这里定义了点 $x_m^{(i)}$ 和测地线 $\alpha_m^{(i)}$, $\beta_m^{(i)}$, 使得对每个

$C^{(i)}$, 其每条光滑极大子弧的两个端点为 $x_m^{(i)}$ 和 $x_{m+1}^{(i)}$ $(x_{m(i)+1}^{(i)} := x_1^{(i)})$, 并且这条子弧分别在 $x_m^{(i)}$ 和 $x_{m+1}^{(i)}$ 处正交于 $\alpha_m^{(i)}$ 和 $\beta_{m+1}^{(i)}(\beta_{m(i)+1}^{(i)} := \beta_1^{(i)})$. 记这一子弧为 $[x_m^{(i)}, x_{m+1}^{(i)}]$, 设 $F_m^{(i)}, 1 \leqslant m \leqslant m(i), 1 \leqslant i \leqslant k$ 为 $\alpha_m^{(i)}$, $[x_m^{(i)}, x_{m+1}^{(i)}]$ 和 $\beta_{m+1}^{(i)}$ 围成的圆盘区域. 一方面, 由 Gauss-Bonnet 定理得

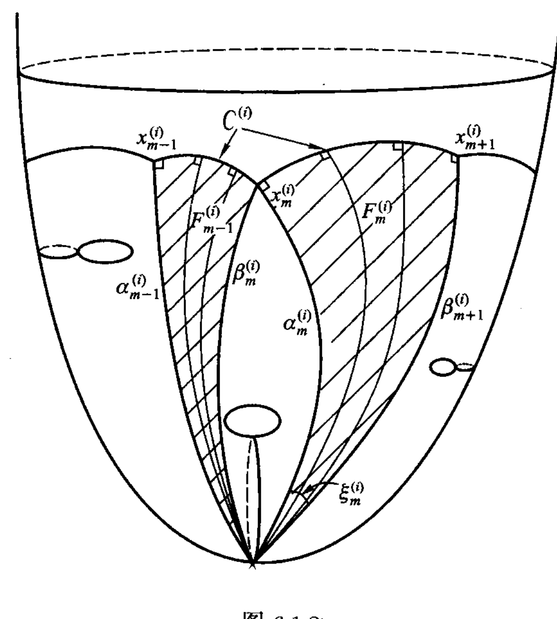


图 6.1.2

$$c(B) = 2\pi\chi(M) - \lambda(\partial B) - \theta, \tag{6.1.5}$$

其中 θ 为在 ∂B 的折点处 B 的所有外角之和, $\lambda(\partial B)$ 为 ∂B 关于单位内法向量场的测地全曲率; 另一方面, 由引理 4.1.1 得

$$c(M \setminus (B \bigcup F_p)) = \theta + \sum_i \lambda(J_i). \tag{6.1.6}$$

对每个 $F_m^{(i)}$,

$$c(B \bigcap F_m^{(i)}) = \xi_m^{(i)} - \lambda(\partial B \bigcap F_m^{(i)}), \tag{6.1.7}$$

其中 $\xi_m^{(i)}$ 为 $\dot{\alpha}_m^{(i)}(0)$ 和 $\dot{\beta}_{m+1}^{(i)}(0)$ 之间的角. 于是由 (6.1.5) 和 (6.1.7) 得

$$c\left(B \setminus \bigcup_{i,m} F_m^{(i)}\right) = 2\pi\chi(M) - \theta - \sum_{i,m} \xi_m^{(i)} - \lambda\left(\partial B \setminus \bigcup_{i,m} F_m^{(i)}\right). \tag{6.1.8}$$

由于当 $T\to\infty$ 时 $\partial B\setminus\bigcup_{i,m}F_m^{(i)}-\partial B\setminus F_p$ 的总弧长趋于 0, 故

$$\lim_{T\to\infty}\lambda\left(\partial B\setminus\bigcup_{i,m}F_m^{(i)}\right)=\sum_i\lambda(J_i). \tag{6.1.9}$$

进而 $\lim_{T\to\infty}\sum_{i,m}\xi_m^{(i)}=\mu(A_p)$ 是平凡的. 因此由 (6.1.8) 得

$$c(B\setminus F_p)=\lim_{T\to\infty}c\left(B\setminus\bigcup_{i,m}F_m^{(i)}\right)=2\pi\chi(M)-\theta-\mu(A_p)-\sum_i\lambda(J_i). \tag{6.1.10}$$

综合 (6.1.6) 和 (6.1.10) 即得

$$c(M\setminus F_p)=c(M\setminus(B\bigcup F_p))+c(B\setminus F_p)=2\pi\chi(M)-\mu(A_p).$$

证毕.

引理 6.1.6 假设 M 具有有限面积, 设 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$ 为射线, 使得除了它的有限长度的子弧之外的部分都在 M 的管 U 之内. 则对任意正数 b, $\gamma\mid_{[b,\infty)}$ 是唯一从 $\gamma(b)$ 出发的射线, 满足除了它的有限长度的子弧之外的部分都在管 U 之中.

证明 记 $q:=\gamma(b)$. 假设存在从 $q=\tau(0)$ 出发的射线 $\tau:[0,\infty)\longrightarrow M$, $\gamma\mid_{[\gamma(b),\infty)}$ 除了其有限长度的子弧之外都在 U 中 (见图 6.1.3), 且 τ 与 γ 不相同. 则存在正数 δ, 使得对充分大的 t, 有

$$d(\gamma(0),\tau(t))\leqslant t+b-\delta. \tag{6.1.11}$$

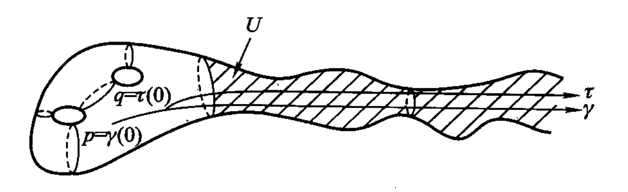


图 6.1.3

由于我们没有假设 M 容许全曲率, 故对充分大的非特例值 t, $S(q,t)\bigcap U$ 并不总有唯一的分支. 但对任意非特例值 $t>\max\{d(x,q);x\in\partial U\}$, $S(q,t)\bigcap U$ 具有唯一一个自由同伦于 U 的边界 ∂U 的分支. 若对充分大的非特例值 t, 从 q 出发的射线与 $S(q,t)\bigcap U$ 相交, 则该射线与 $S(q,t)\bigcap U$ 相交于唯一一个自由同伦于 ∂U

的 $S(q,t)\bigcap U$ 的分支中的一点. 因此对充分大的非特例值 t, $\gamma(t+b)$ 和 $\tau(t)$ 在 $S(q,t)$ 的相同分支中, 于是对这样的 t 有

$$d(\tau(t),\gamma(t+b))\leqslant\frac{L(t)}{2}\tag{6.1.12}$$

成立, 其中对非特例值 t, $L(t)$ 为 $S(q,t)$ 的长度. 由三角不等式, (6.1.11) 和 (6.1.12) 得

$$\begin{aligned}t+b=d(\gamma(0),\gamma(t+b))&\leqslant d(\gamma(0),\tau(t))+d(\tau(t),\gamma(t+b))\\&\leqslant t+b-\delta+\frac{L(t)}{2}.\end{aligned}$$

于是对任意充分大的非特例值 t, 有

$$L(t)\geqslant 2\delta.\tag{6.1.13}$$

因而由 (5.2.7) 或 (5.3.2) 知 M 的面积无限, 矛盾. 证毕.

定理 6.1.2 假设 M 具有有限面积, 则存在 Lebesgue 测度为 0 的集合 E, 使得每个点 $q\in M\setminus E$ 满足: 恰好存在 k 条从 q 出发的射线, 其中 k 为 M 的端的个数.

证明 设 K 为 M 的柱心, 于是 $\overline{M\setminus K}$ 有 k 个管 $U_1,\cdots,U_k$. 取点 p, 对每个管 U_i, 选取从 p 出发的射线 $\gamma_i:[0,\infty)\to M$, 使得除它的有限长的子弧之外的部分都在 U_i 中. 记 F_i 为关于 γ_i 的 Busemann 函数, 记 $E:=E_1\bigcup\cdots\bigcup E_k$, 其中 E_i 为 F_i 中所有不可微点的集合. 由于每个 E_i 为零测集, 故 E 也为零测集. 任取 $q\in M\setminus E$, 则存在至少 k 条从 q 出发的射线 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$, 使得对每个 σ_i, 除它的有限长的子弧之外的部分都在 U_i 中. 我们来证明不存在除 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 之外的从 q 出发的射线. 假设存在从 $q=\gamma(0)$ 出发的射线 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 不同于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$, 对充分大的 a, $\gamma|_{[a,\infty)}$ 包含于唯一的管中, 记为 U_1. 任取正数 b, 设 τ 为从 $\gamma(b)$ 出发的 σ_1 的余射线, 则由 τ 的定义, 它除了有限长的子弧之外都在 U_1 中. 由引理 6.1.6, τ 是 γ 的子射线; 于是 γ 是 σ_1 的余射线. 由于 q 是 F_1 的可微点, q 容许 σ_1 的唯一的余射线, 矛盾. 证毕.

引理 6.1.7 假设 M 容许全曲率, 设 $\{D_n\}$ 为 M 中区域的序列. 若存在 M 的 Borel 子集 H, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}c(D_n\bigcap K)=c(H\bigcap K)$ 对任意紧致子集 K 成立, 则

$$\limsup_{n\to\infty}c(D_n)\leqslant c(H).$$

证明 设 ϵ 为任意正数, 由定理 2.2.1 知, 存在 M 的紧致集 $K(\epsilon)$, 使得

$$\int_{M\setminus K(\epsilon)}G_+\,\mathrm{d}M<\epsilon.\tag{6.1.14}$$

这里 $G_+ = \max\{G, 0\}$, 记 $\{K_j\}$ 为紧致子集的单调递增序列, 满足 $\bigcup_j K_j = M$, $K_1 \supset K(\epsilon)$, 则由 (6.1.14) 得, 对任意 j, n,

$$c(D_n) \leqslant c(D_n \bigcap K_j) + \epsilon. \tag{6.1.15}$$

于是对任意 j,

$$\limsup_{n\to\infty} c(D_n) \leqslant c(H \bigcap K_j) + \epsilon. \tag{6.1.16}$$

由于 $c(H) = \lim_{j\to\infty} c(H \bigcap K_j)$, 故有 $\limsup_{n\to\infty} c(D_n) \leqslant c(H)$. 证毕.

练习 6.1.1　选取序列 $\{D_n\}$ 和以上引理中的 H, 满足 $\limsup_{n\to\infty} c(D_n) < c(H)$.

定义 6.1.2　对每个点 $p \in M$ 和 $u \in S_pM$, 记 $\gamma_u(t) := \exp_p tu$, $t \geqslant 0$ 表示从 p 出发且与 u 相切的测地线.

定义 6.1.3　对 M 的每个柱心 K, $p \notin K$ 以及不相同的切向量 $u, v \in \{w \in S_pM; \gamma_w[0,\infty) \bigcap K \neq \varnothing\}$, 记 $D(u,v)$ 为 $\gamma_u|_{[0,s(\gamma_u)]}$, $\gamma_v|_{[0,s(\gamma_v)]}$ 和 ∂K 被 γ_u 和 γ_v 所截得的子弧所围成的圆盘区域.

定理 6.1.3　假设 M 容许全曲率, 设 K 为 M 的任意柱心, ϵ 为任意正数, 则存在数 $R(\epsilon)$, 使得若 $p \in M$ 满足 $d(p, K) > R(\epsilon)$, 则 $\theta_K(p) < \epsilon$. 其中 $\theta_K(p)$ 为区域 $D(u,v)$ 在 p 处的最大内角, $u, v \in \{u \in A_p; \gamma_u[0,\infty) \bigcap K \neq \varnothing\}$.

证明　只要证明 M 上的任意发散点列 $\{p_n\}$ 具有子列 $\{p_{n_j}\}$ 并且满足 $\lim_{j\to\infty} \theta_K(p_{n_j}) = 0$. 不失一般性, 可以假设所有的 p_n 包含于管 U 中, 且 U 为 $M \setminus \mathrm{int}\, K$ 的连通分支. 考虑 U 的万有黎曼覆盖空间 $\tilde{U}$, 设 $\tau : [0,\infty) \longrightarrow M$ 是 U 内从 U 的边界 $\partial\tilde{U}$ 出发的一条射线, 即对任意 $t > 0$, $d(\tau(t), \partial U) = t$, 沿 $\tau[0,\infty)$ 剪开 U, 设 $\cdots, \tilde{U}_{-1}, \tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \cdots$ 为依此次序落在 $\tilde{u}$ 中的 U 的基本区域. 设 $\tilde{\tau}_i : [0,\infty) \to \tilde{U}$ 为 τ 的提升射线, 它的像与 $\partial\tilde{U}_{i-1} \bigcap \partial\tilde{U}_i$ 重合, 且

$$\tilde{W} := \tilde{U}_0 \bigcup \tilde{U}_1 \bigcup \tilde{U}_2 \bigcup_{i=0}^{3} \tilde{\tau}_i[0,\infty).$$

则 $\partial\tilde{W}$ 由 $\tilde{\tau}_0[0,\infty)$ 和 $\tilde{\tau}_3[0,\infty)$ 两条射线组成, 且 $\partial\tilde{U}$ 的子弧被 $\tilde{\tau}_0$ 和 $\tilde{\tau}_3$ 所截. 对每个 n, 选取 $u_n, v_n \in \{u \in A_p; \gamma_u[0,\infty) \bigcap K \neq \varnothing\}$, 使得 $\theta_K(p_n)$ 等于 $D(u_n, v_n)$ 在 p_n 处的内角. 为简单起见, 记 $\alpha_n := \gamma_{u_n}$, $\beta_n := \gamma_{v_n}$. 由引理 3.2.2 知, 可以假设 p_n 不在 τ 上, 因此对每个 n, 可以选取 p_n 在 $\tilde{U}_1$ 中的提升点 $\tilde{p}_n$. 记 $\tilde{\alpha}_n : [0, t_n] \to \widetilde{U}$, $\tilde{\beta}_n : [0, s_n] \to \tilde{U}$, 分别表示从 $\tilde{p}_n$ 出发的 $\alpha_n|_{[0,t_n]}$ 和 $\beta_n|_{[0,s_n]}$ 的提升测地线, 其中 $t_n := s(\alpha_n)$, $s_n := s(\beta_n)$. 由射线的极小性可知, 对每个 n, $\tilde{\alpha}_n$ 和 $\tilde{\beta}_n$ 分别至多与 $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\tau}_i[0,\infty)$ 相交一次. 这表明这些测地线在 $\tilde{W}$ 中, 特别地,

$\tilde{x}_n := \tilde{\alpha}_n(t_n)$, $\tilde{y}_n := \tilde{\beta}_n(s_n)$ 在 $\partial\tilde{W}\bigcap\partial\tilde{U}$ 上. 如果需要, 可选取子序列, 可以证明 $\{\tilde{x}_n\}$ 和 $\{\tilde{y}_n\}$ 分别收敛于 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$, 且 $\{\tilde{\alpha}_n\}$ 和 $\{\tilde{\beta}_n\}$ 分别收敛于 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$. 由引理 3.2.2 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_K(p_n)=0$. 证毕.

§2 射线质量的渐近性态

本节假设 M 为有限连通、完备光滑的 2 维黎曼流形, 且容许全曲率 $c(M)$.

定理 6.2.1 假设 M 具有唯一的端, $\lambda_\infty(M)<2\pi$. 则对于每个正数 ϵ, 存在 M 的紧致子集 $K(\epsilon)$, 使得对任意 $p\in M\setminus K(\epsilon)$,

$$|\,\mu(A_p)-\lambda_\infty(M)\,|<\epsilon.$$

证明 由定理 2.2.1 和本定理的假设可知

$$-\infty<2\pi(\chi(M)-1)<c(M)\leqslant 2\pi\chi(M).$$

因此 $\int_M |\,G\,|\,\mathrm{d}M$ 有限. 任意取定正数 ϵ, 选取 M 的柱心 K, 使得

$$\int_{M\setminus K}|\,G\,|\,\mathrm{d}M<\frac{\epsilon}{2}. \tag{6.2.1}$$

任取点 p 满足 $d(p,K)>R(K)$, 其中 $R(K)$ 如引理 6.1.1 中的定义. 设 D 是满足 $K\subset D$ 的 $M\backslash F_p$ 的一个分支, 其中 F_p 是由 (6.1.4) 式定义的集合. 则由引理 6.1.3 和 (6.2.1) 式得

$$\begin{aligned}c(M)-2\pi\chi(M)+2\pi+\frac{\epsilon}{2}>\theta&=c(D)-2\pi\chi(M)+2\pi\\&>c(M)-2\pi\chi(M)+2\pi-\frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}\tag{6.2.2}$$

集合 $M\setminus F_p$ 可以表示为至多可数个不交开集 D_i 和 D 的并集 $\bigcup\limits_i D_i\bigcup D$. 注意到每个$D_i$ 由两条从 p 出发的射线围成, 且同胚于平面. 由引理 6.1.3, (6.2.1) 和 (6.2.2) 式,

$$\begin{aligned}c(M)-2\pi\chi(M)+2\pi-\epsilon<2\pi-\mu(A_p)&=\theta+\sum_i c(D_i)\\&<c(M)-2\pi\chi(M)+2\pi+\epsilon.\end{aligned}$$

这个不等式表明, 对任意的 $p\in M\setminus K(\epsilon)$,

$$2\pi\chi(M)-c(M)+\epsilon>\mu(A_p)>2\pi\chi(M)-c(M)-\epsilon,$$

其中 $K(\epsilon)=\{q\in M;d(q,K)\leqslant R(K)\}$. 证毕.

由定理 6.1.1 和定理 6.2.1 可以得到以下两个推论.

推论 6.2.1　若 M 是具有非负 Gauss 曲率的黎曼平面, 则

$$\inf_{p\in M}\mu(A_p)=\lambda_\infty(M).$$

推论 6.2.2　若 M 为黎曼平面, 则

$$2\pi-\int_M G_+\mathrm{d}M\leqslant\inf_{p\in M}\mu(A_p)\leqslant 2\pi-c(M)=\lambda_\infty(M),$$

其中 $G_+=\max\{G,0\}$.

定理 6.2.2　假设 M 恰有一个端且 $\lambda_\infty(M)<2\pi$. 若 $\{K_j\}$ 是 M 的紧致子集的单调递增序列, $\lim_{j\to\infty}K_j=M$, 则有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{p\in K_j}\mu(A_p)\mathrm{d}M}{\displaystyle\int_{K_j}\mathrm{d}M}=\lambda_\infty(M).$$

证明　首先容易看出函数 $M\ni p\mapsto\mu(A_p)$ 可测. 由于 M 中射线序列的极限仍为射线, 函数 $M\ni p\mapsto\mu(A_p)\in\mathbb{R}$ 是上半连续的, 因此这个函数局部可积. 若 M 的面积无限, 则由定理 6.2.1 知以上积分公式是平凡的. 若 M 具有有限面积, 则由定理 6.1.2, 对几乎所有 $p\in M$, $\mu(A_p)=0$. 因此等式的左边为 0. 然而, 由定理 5.2.1 知 $\lambda_\infty(M)=0$. 定理证毕.

对于 $\lambda_\infty(M)=2\pi$ 且 M 不容许直线的情形, 以上定理仍然成立. 利用定理 6.1.1, [84] 中对满足 $\lambda_\infty(M)=2\pi$ 的 M 推广了定理 6.2.1, 于是有以上定理. 直线的存在性使证明变得困难. 在 [90] 中 Shioya 对 $\lambda_\infty(M)\geqslant 2\pi$ 的情形将这些结论作了如下推广:

定理 6.2.3　设 U_i 为 M 中的管, 则对每个正数 ϵ, 存在 M 的紧致子集 $K(\epsilon)$, 使得对任意的 $p\in U_i\setminus K(\epsilon)$,

$$|\min\{2\pi,\lambda_\infty(U_i)\}-\mu(A_p)|\leqslant\epsilon.$$

因而可得

定理 6.2.4　假设 M 恰有一个端. 若 $\{K_j\}$ 是 M 的紧致子集的单调递增序列, $\lim_{j\to\infty}K_j=M$, 则有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{p\in K_j}\mu(A_p)\mathrm{d}M}{\displaystyle\int_{K_j}\mathrm{d}M}=\min\{2\pi,\lambda_\infty(M)\}.$$

在 M 具有多于一个端的情形下定理 6.2.4 中左侧积分式的极限并不总是存在, 但对关于 Jordan 曲线的球的序列, 极限存在.

定理 6.2.5 设 $\mathcal{C}$ 为 M 中的光滑 Jordan 曲线, $B(t) := B(\mathcal{C}, t)$, 则有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{p\in B(t)} \mu(A_p)\mathrm{d}M}{\displaystyle\int_{B(t)} \mathrm{d}M} = \begin{cases} (\lambda_\infty(M))^{-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_\infty(U_i) & \\ \times \min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i)\}, & \text{若 } \lambda_\infty(M) > 0; \\ 0, & \text{若 } \lambda_\infty(M) = 0. \end{cases}$$

其中管族 U_i 满足 $M \setminus \mathrm{int} \bigcup_i U_i$ 为柱心.

在定理 6.2.3 假设下证明 任取正数 ϵ, 由定理 6.2.3, 可以选取充分大的非特例值 t_1, 使得 $M \setminus \mathrm{int}\, B$ 为 k 个互不相交的管 $U_1, \cdots, U_k$ 的并集, 其中 $B := B(\mathcal{C}, t_1)$, 并且对任意的 $p \in U_i$,

$$|\min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i)\} - \mu(A_p)| \leqslant \epsilon. \tag{6.2.3}$$

对每个 i, 设 M_i 为完备开 2 维黎曼流形, 存在 $B \bigcup U_i$ 到 M_i 的等距嵌入 ι, 且 $M_i \setminus \iota(B \bigcup U_i)$ 由 $k-1$ 个互不相交的圆盘组成, 则由 Gauss-Bonnet 定理知 $\lambda_\infty(M_i) = \lambda_\infty(U_i)$, 并且 $\displaystyle\int_{U_i \bigcap B(t)} \mathrm{d}M$ 和 $B(\mathcal{C}, t)$ 的面积 $A_i(t)$ 之间的差是有界的, 因此由定理 5.2.1 得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_{U_i \bigcap B(t)} \mathrm{d}M = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} A_i(t) = \frac{\lambda_\infty(U_i)}{2}, \tag{6.2.4}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_{B(t)} \mathrm{d}M = \frac{\lambda_\infty(M)}{2}.$$

由 (6.2.3) 式得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_i \lambda_\infty(U_i)(\min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i)\} - \epsilon) \\ \leqslant\ & \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_{p\in B(t)} \mu(A_p)\mathrm{d}M \\ \leqslant\ & \frac{1}{2} \sum_i \lambda_\infty(U_i)(\min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i)\} + \epsilon). \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性, 有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_{p\in B(t)} \mu(A_p)\mathrm{d}M = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_\infty(U_i) \min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i)\}. \tag{6.2.5}$$

若 $2\pi\chi(M)-c(M)>0$, 则由 (6.2.4) 和 (6.2.5) 得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{p\in B(t)}\mu(A_p)\mathrm{d}M}{\displaystyle\int_{B(t)}\mathrm{d}M}=\frac{1}{\lambda_\infty(M)}\sum_{i=1}^{k}\lambda_\infty(U_i)\min\{2\pi,\lambda_\infty(U_i)\}.$$

假设 $\lambda_\infty(M)=0$, 则由引理 3.1.1, 对每个 i, $\lambda_\infty(U_i)=0$. 因此由 (6.2.3) 可知, 对任意的 $p\in M\setminus B$,

$$\mu(A_p)\leqslant\epsilon. \tag{6.2.6}$$

若 M 的面积无限, 则由 (6.2.6) 知

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{p\in B(t)}\mu(A_p)\mathrm{d}M}{\displaystyle\int_{B(t)}\mathrm{d}M}&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_{B(t)}\mathrm{d}M}\int_{p\in B(t)\setminus B}\mu(A_p)\mathrm{d}M\\&\leqslant\epsilon\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\displaystyle\int_{B(t)}\mathrm{d}M}\int_{B(t)\setminus B}\mathrm{d}M=\epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(\int_{p\in B(t)}\mu(A_p)\mathrm{d}M\Big/\int_{B(t)}\mathrm{d}M\right)=0$. 由定理 6.1.2 知, M 的面积有限的情形是平凡的. 证毕.

定义 6.2.1 对 M 的每个柱心 K, 记 $U_i(K), i=1,\cdots,k$ 为满足 $M\setminus\mathrm{int}\,K=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k}U_i(K)$ 的 M 的管.

定义 6.2.2 若 U_i 为 M 的管, 则对每个 $p\in\mathrm{int}\,U_i$, 定义 A_p 的三个子集:

$$\begin{aligned}A_p^c(U_i)&:=\{u\in A_p;\gamma_u[0,\infty)\not\subset U_i\ \text{但对充分大的}\ t_1,\gamma_u[t_1,\infty)\subset U_i\},\\A_p(U_i)&:=\{u\in A_p;\gamma_u[0,\infty)\subset U_i\},\\A_p(\mathrm{int}\,U_i)&:=\{u\in A_p;\gamma_u[0,\infty)\subset\mathrm{int}\,U_i\}.\end{aligned}$$

注意到 $A_p^c(U_i)$ 为集合

$$\{v\in A_p;\ \text{对充分大的}\ t_1,\gamma_v[t_1,\infty)\subset U_i\}$$

中的 $A_p(U_i)$ 的补集.

我们需要以下三个引理帮助证明定理 6.2.3. 我们先来证明定理的结论, 然后再证明这三个引理.

引理 6.2.1 设 $\{p_j\}$ 为 M 的管 $U_i(K_0)$ 中的发散点列; 假设 M 的每个柱心 $K \supset K_0$ 对充分大的 j, $A_{p_j}^c(U_i(K))$ 非空, 其中 $U_i(K)$ 表示 $U_i(K_0)$ 的子管. 则 $\lambda_\infty(U_i(K)) \leqslant 2\pi$, 且

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_{p_j}) = \lambda_\infty(U_i(K)) = \min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i(K))\}.$$

引理 6.2.2 对 M 的每个柱心 K, 存在 M 的紧致子集 $K_1 \supset K$, 使得对所有 $p \in M \setminus K_1$, $A_p(U_i(K))$ 非空.

定义 6.2.3 若对 $p \in \operatorname{int} U_i(K)$, $A_p(U_i(K)) \neq \varnothing$, 则用 $\xi_K(p)$ 表示 $D_p(K)$ 在 p 处的内角. $D_p(K)$ 为 $M \setminus \{\gamma_v(t); t \geqslant 0, v \in A_p(U_i(K))\}$ 唯一包含 K 的分支; 见图 6.2.1.

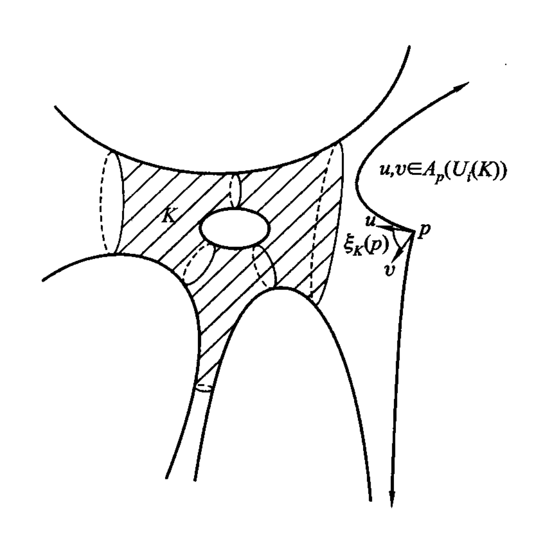


图 6.2.1

引理 6.2.3 设 K 为 M 的柱心, $\{p_j\}$ 是管 $U_i(K)$ 中的任意发散点列, 使得 $A_{p_j}^c(U_i(K))$ 对每个 j 都非空, 则

$$\lim_{j\to\infty} \xi_K(p_j) = 0.$$

我们先假设引理 6.2.1, 6.2.2 和 6.2.3 成立, 来证明定理 6.2.3.

定理 6.2.3 的证明 设 $\{p_j\}$ 为管 U_i 中的任意发散点列. 只需要证明序列有子列 $\{p_{j_n}\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{p_{j_n}}) = \min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i)\}.$$

由引理 6.2.1, 可以假设存在柱心 K_0, 使得对所有 j, $A^c_{p_j}(U_i(K_0))$ 非空. 任取正数 ϵ, 设 M 的柱心 $K(\epsilon) \supset K_0$ 满足

$$\int_{M \setminus K(\epsilon)} G_+ \mathrm{d}M < \epsilon. \tag{6.2.7}$$

由引理 6.2.2 和 6.2.3 得, 存在 j_0, 使得对任意的 $j > j_0$,

$$\xi_{K(\epsilon)}(p_j) < \epsilon. \tag{6.2.8}$$

由引理 6.1.3 和 (6.2.7) 式可知, 对任意的 $j > j_0$,

$$2\pi - \mu(A_{p_j}) - \xi_{K(\epsilon)}(p_j) \leqslant \sum_m c(D_m) < \epsilon,$$

其中 D_m 表示 $U_i(K(\epsilon)) \setminus (D_{p_j}(K(\epsilon)) \bigcup \{\gamma_v(t); t \geqslant 0, v \in A_{p_j}(U_i(K(\epsilon)))\})$ 的分支. 于是由 (6.2.8) 式得对任意 $j > j_0$,

$$\mu(A_{p_j}) \geqslant 2\pi - 2\epsilon.$$

因此

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_{p_j}) = 2\pi.$$

因为存在 U_i 中的发散点列 $\{p_j\}$, 使得对所有 j, $A^c_{p_j}(U_i(K_0))$ 非空, 故除非子弧的长度有限, 否则 $U_i(K_0)$ 中必存在直线. 由定理 3.7.3 知 $\lambda_\infty(U_i(K_0)) \geqslant 2\pi$, 因此

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_{p_j}) = \min\{2\pi, \lambda_\infty(U_i(K_0))\}.$$

证毕.

引理 6.2.1 的证明 设正整数 j_0 满足对任意的 $j \geqslant j_0$, $A^c_{p_j}(U_i(K_0))$ 为空集. 使用引理 6.1.3 证明中相同的方法, 可知对任意的 $j \geqslant j_0$,

$$c(D_{p_j}(K_0) \bigcap U_i(K_0)) = -\lambda(\partial U_i(K_0)) + \xi_{K_0}(p_j) - 2\pi. \tag{6.2.9}$$

特别地,

$$-(c(D_{p_j}(K_0) \bigcap U_i(K_0)) + \lambda(\partial U_i(K_0))) \leqslant 2\pi.$$

因为 $\bigcup_{j=j_0}^{\infty} D_{p_j}(K_0) \bigcap U_i(K_0) = U_i(K_0)$, 由引理的假设可得

$$\lambda_\infty(U_i(K_0)) \leqslant 2\pi.$$

特别地, $c(U_i(K_0))$ 有限. 任取正数 ϵ, 设 $K(\epsilon) \supset K_0$ 为 M 的柱心, 满足

$$\int_{U_i(K_0) \setminus K(\epsilon)} |\, G \,|\, \mathrm{d}M < \frac{\epsilon}{2}.$$

因为对充分大的 j, $D_{p_j}(K_0) \supset K(\epsilon)$, 由 (6.2.9) 得, 对充分大的 j,

$$2\pi - \lambda_\infty(U_i(K_0)) - \frac{\epsilon}{2} < \xi_{K_0}(p_j) < 2\pi - \lambda_\infty(U_i(K_0)) + \frac{\epsilon}{2}.$$

因此由定理 6.1.3 知

$$\lambda_\infty(U_i(K_0)) - \epsilon \leqslant \mu(A_{p_j}) \leqslant \lambda_\infty(U_i(K_0)) + \epsilon$$

对充分大的 j 成立. 证毕.

对于从 $p \in \operatorname{int} U$ (U 为管) 出发的不同射线 α, β, $\dot\alpha(0)$, $\dot\beta(0) \in A_p^c(U)$, 记 $H(\alpha,\beta)$ 为

$$\operatorname{int} U \setminus (\alpha[t(\alpha),\infty) \bigcup \beta[t(\beta),\infty))$$

的包含 p 的分支; 见图 6.2.2.

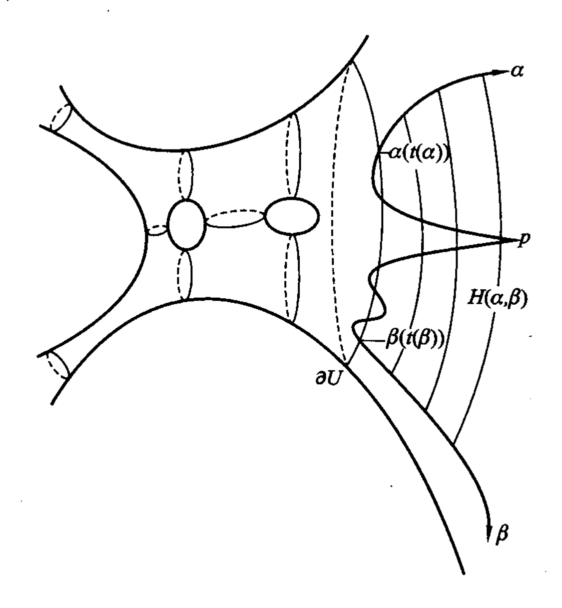


图 6.2.2

引理 6.2.2 的证明 假设存在柱心 K 和管 $U := U_i(K)$ 中的发散点列 $\{p_j\}$, 满足对任意 j, $A_{p_j}(U)$ 为空集, 我们来构造矛盾. 首先, 对所有充分大的 j, $A_{p_j}^c(U)$ 不由单个元素组成. 若 $A_{p_j}^c(U)$ 由单个元素组成, 则一方面 U 容许唯一的从 p_j 出发的射线, 于是 $\lambda_\infty(U) = 0$. 另一方面, 对充分大的 j, 存在从 p_j 出发的射线与 ∂U 相交, 于是 U 中存在直线, 除非其子弧长度有限, 这表明 $\lambda_\infty(U) \geqslant 2\pi$, 矛盾. 因此, 不失一般性, 我们可以假设对任意的 j, $A_{p_j}^c(U)$ 由多于一个元素组成. 对任意一对不同的射线 $\tau_i, i = 1,2$, 满足 $\dot\tau_i(0) \in A_{p_j}^c(U)$, 且对任意射线 γ 满足 $\dot\gamma(0) \in A_{p_j}^c(U)$, $\gamma(t(\gamma))$ 不是 $\overline{D}(\dot\tau_1(0), \dot\tau_2(0))$ 中的元素, 这里 $\overline{D}(\dot\tau_1(0), \dot\tau_2(0))$ 表示

区域 $D(\dot{\tau}_1(0),\dot{\tau}_2(0))$ 的闭包 (见定义 6.1.3); 见图 6.2.3. 因此可以选取两条不同射线 α_j,β_j, 满足 $\dot{\alpha}_j(0),\dot{\beta}_j(0)\in A^c_{p_j}(U)$, 使得除 α_j,β_j 之外不存在射线 γ 满足 $\gamma(t(\gamma))\in\overline{H}_j\bigcap\partial U$, 这里 $\overline{H}_j$ 表示 $H_j:=H(\alpha_j,\beta_j)$ 的闭包, 则可证明 H_j 的全曲率 $c(H_j)$ 满足

$$c(H_j)=\pi-\lambda(\partial H_j). \tag{6.2.10}$$

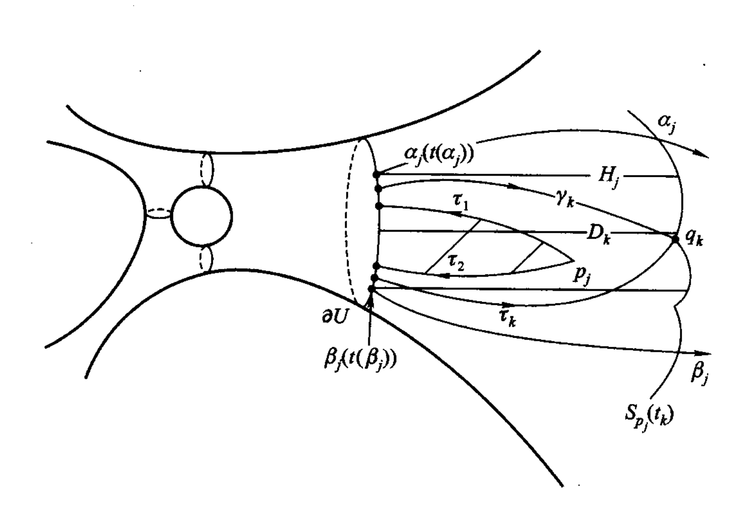


图 6.2.3　射线 τ_1 与 τ_2 间的区域为 $D(\tau_1'(0),\tau_2'(0))$.

设 $\{t_k\}$ 为关于 $S_{p_j}(t)$ 的非特例值的单调递增发散序列, 使得在 $S_{p_j}(t_1)\bigcap H_j$ 上存在割点, 则对每个 k, 可以选取正规割点 $q_k\in S_{p_j}(t_k)\bigcap H_j$, 使得 H_j 中的相对紧区域的序列 $\{D(-\dot{\gamma}_k(t_k),-\dot{\tau}_k(t_k))\}$ 单调递增, 其中 γ_k 和 τ_k 为连接 p_j 和 q_k 的不同极小测地线. 为方便起见, 记 $D_k:=D(-\dot{\gamma}_k(t_k),-\dot{\tau}_k(t_k))$. 由于已经假设 $A_{p_j}(U)$ 为空集, 故 $k\to\infty$ 时, $\{\gamma_k\}$ 和 $\{\tau_k\}$ 分别收敛于 γ_∞ 和 τ_∞, 其中 $\dot{\gamma}_\infty(0)$, $\dot{\tau}_\infty(0)\in A^c_{p_j}(U)$, 射线 γ_∞ 和 τ_∞ 满足 $\gamma_\infty(t(\gamma_\infty))$, $\tau_\infty(t(\tau_\infty))\in\overline{H}_j\bigcap\partial U$. 由 H_j 的性质可知 $\{\gamma_k\}$ 和 $\{\tau_k\}$ 分别收敛于 α_j 和 β_j, 故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k=H_j$, 于是有

$$\lim_{k\to\infty}c(D_k)=c(H_j). \tag{6.2.11}$$

由命题 5.1.1 可知 D_k 在 q_k 处内角的序列收敛于 0. 于是由 Gauss-Bonnet 定理,

$$\lim_{k\to\infty}c(D_k)=\pi-\lambda(\partial H_j). \tag{6.2.12}$$

由 (6.2.11) 和 (6.2.12) 可得 (6.2.10). 不失一般性, 可以假设两条极限直线存在:

$$\alpha:=\lim_{k\to\infty}\alpha_k,\qquad \beta:=\lim_{k\to\infty}\beta_k;$$

见图 6.2.4. 记 H 为 $\operatorname{int} U \setminus (\alpha[t(\alpha),\infty) \bigcup \beta[t(\beta),\infty))$ 的分支, 使得 $\partial H \bigcap \partial U = \lim_{i\to\infty} \partial H_i \bigcap \partial U$. 对每个 j, $\bar{H}_j$ 包含两条测地线段 $\alpha_j\,|_{[0,s(\alpha_j)]}$, $\beta_j\,|_{[0,s(\beta_j)]}$. 于是 $\alpha\,|_{(-\infty,s(\alpha)]}$ 将 H 划分为两个半平面 H_α 和 H_β, $\bar{H}_\alpha \supset \alpha[t(\alpha),\infty)$. 则由引理 2.2.2 和推论 2.2.1 可得

$$c(H_\alpha) \leqslant -\lambda(\partial H_\alpha), \tag{6.2.13}$$

$$c(H_\beta) \leqslant \pi - \lambda(\partial H_\beta). \tag{6.2.14}$$

于是有

$$c(H) = c(H_\alpha) + c(H_\beta) \leqslant \pi - (\lambda(\partial H_\alpha) + \lambda(\partial H_\beta)) = -\lambda(\partial H). \tag{6.2.15}$$

由引理 6.1.7 得

$$\limsup_{i\to\infty} c(H_i) \leqslant c(H). \tag{6.2.16}$$

所以由 (6.2.10) 和 (6.2.16) 可得

$$\limsup_{i\to\infty} c(H_i) = \lim_{i\to\infty} c(H_i) = \pi - \lim_{i\to\infty} \lambda(\partial H_i) = \pi - \lambda(\partial H) \leqslant c(H).$$

这与 (6.2.15) 式矛盾. 证毕.

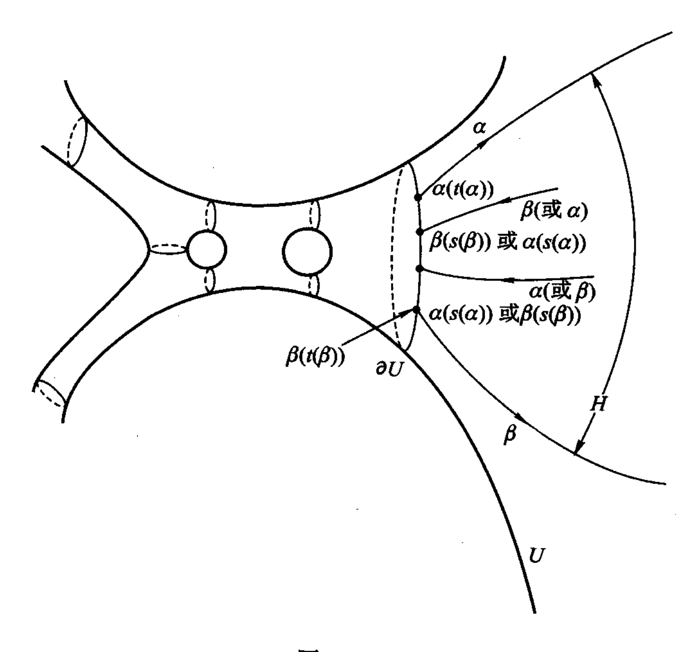


图 6.2.4

引理 6.2.3 的证明　记 $U := U_i(K)$. 只需要证明任意发散序列 $\{p_j\}$ 具有子列 $\{p_{j_n}\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_K(p_{j_n}) = 0.$$

由引理 6.2.2, 可以假设对任意 j, $A_{p_j}(U)$ 非空. 对每个 j, 设从 p_j 出发的射线 γ_j 和 τ_j 组成 $D_j := D_{p_j}(K)$ 的边界, 其中区域 $D_{p_j}(K)$ 如定义 6.2.3 中给出; 见图 6.2.5. 若 $\dot\gamma_j(0) \in A_{p_j}(\mathrm{int}\ U)$, 则可以选取射线 α_j 满足 $\dot\alpha_j(0) \in A^c_{p_j}(U)$, 使得存在 $\mathrm{int}\ U \bigcap D_j \setminus (\alpha_j[0, s(\alpha_j)] \bigcup \alpha_j[t(\alpha_j), \infty))$ 的分支 T_j, T_j 中不存在从 p_j 出发的射线, 其子弧长是无限的. 记 $\eta_K(p_j)$ 为 T_j 在 p_j 处的内角. 若 $\dot\gamma_j(0) \notin A_{p_j}(\mathrm{int}\ U)$, 定义 $\eta_K(p_j) = 0$. 对每个 τ_j, 定义 $\lambda_K(p_j)$ 为 τ_j 的相应的内角. 则

$$\xi_K(p_j) \leqslant \theta_K(p_j) + \eta_K(p_j) + \lambda_K(p_j) \tag{6.2.17}$$

是平凡的.

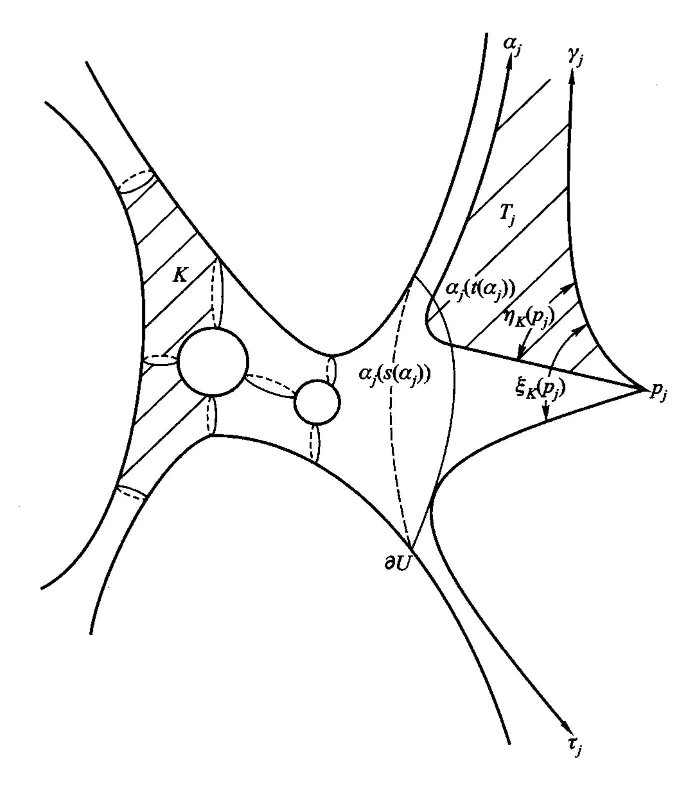


图 6.2.5

由定理 6.1.3 知, 若证明了

$$\lim_{j\to\infty} \eta_K(p_j) = \lim_{j\to\infty} \lambda_K(p_j) = 0,$$

则可以得到 $\lim\limits_{j\to\infty}\xi_K(p_j)=0$, 即为结论. 若 $\{\gamma_j\}$ 具有收敛子列 $\{\gamma_{j_n}\}$, 则由定理 6.1.3 可得 $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_K(p_{j_n})=0$. 于是可以假设 $\{\gamma_j\}$ 是发散序列. 由于 T_j 具有 p_j 的割点, 利用与引理 6.2.2 证明中关于 H_j 的相似计算可得

$$c(T_j)=\pi-\lambda(\partial T_j). \tag{6.2.18}$$

若需要, 选取 $\{p_j\}$ 的子列, 可以假设存在直线 $\alpha:=\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_j$, 且 $U\setminus(\alpha[t(\alpha),\infty)\bigcup\alpha(-\infty,s(\alpha)])$ 的分支 H 包含每个 τ_j, 除非其子弧长有限. 由推论 2.2.1 得

$$c(H)\leqslant-\lambda(\partial H).$$

因此, 一方面, 由引理 6.1.7 可得

$$\limsup_{j\to\infty}c(T_j)\leqslant-\lambda(\partial H); \tag{6.2.19}$$

另一方面, 由 (6.2.18) 式得

$$\limsup_{j\to\infty}c(T_j)=-\lambda(\partial H)+\limsup_{j\to\infty}\eta_K(p_j). \tag{6.2.20}$$

因而结合 (6.2.19) 与 (6.2.20) 可以得到

$$\lim_{j\to\infty}\eta_K(p_j)=0.$$

同样可以得到

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_K(p_j)=0.$$

因此由 (6.2.17) 式, 有

$$\lim_{j\to\infty}\xi_K(p_j)=0.$$

证毕.

第七章　旋转曲面极点和割迹

即使在旋转曲面上也不容易找到非平凡的极点，除非这个曲面具有非正的 Gauss 曲率，我们将给出一个旋转曲面具有非平凡极点的充分必要条件，其证明是通过研究沿任一测地线的 Jacobi 场而得到的 (见 [101])，这一方法是 von Mangoldt [59] 的经典工作. 我们将给出一类特定的旋转曲面的割迹，这其中包括一些著名的例子: 双叶旋转双曲面和旋转抛物面 (见 [102]). von Mangoldt 在 [59] 中证明了双叶旋转双曲面上充分接近于顶点的任一点都是极点. 进而，他在 [59] 中证明了双叶双曲面的两个脐点都是极点，并且任一椭圆抛物面的极点只有两个脐点，这些曲面是 Liouville 曲面的典型例子. Kiyohara 在 [44] 中给出了整体 Liouville 曲面的定义. 完备非紧 Liouville 曲面上的极点也可参见 [40].

§1　测地线的性质

旋转曲面是指一个同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的完备黎曼流形 (M,g)，其中容许一个点 p，使得对每个正数 t，在 $S(p,t)$ 上 M 的 Gauss 曲率为常数，点 p 称为旋转曲面的顶点.

在本章中 (M,g) 表示旋转曲面，p 表示曲面的顶点. 除非 M 具有常 Gauss 曲率，否则顶点是唯一的.

引理 7.1.1　顶点 p 是极点. 进而对 T_pM 上的任一线性等距 F, $\exp_p\circ F\circ\exp_p^{-1}:M\to M$ 是等距.

证明　假设 p 不是极点，则可取 p 的割点 x，使它是 p 的割迹的端点，则 x

是 p 沿任一连接 p 和 x 的极小测地线 $\tau:[0,d(p,x)]\to M$ 的共轭点. 取定这样的测地线 τ, 因为 M 完备非紧, 故存在从 p 出发的射线 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$. 于是对任意的 $t\in[0,d(p,x)]$,

$$G(\gamma(t))=G(\tau(t)).$$

这是因为在 $[0,d(p,x)]$ 上, $d(p,\tau(t))=d(p,\gamma(t))=t$. 因此沿 $\gamma\mid_{[0,d(p,x)]}$ 和 $\tau\mid_{[0,d(p,x)]}$ 分别正交于测地线的 Jacobi 场满足相同的微分方程. 故 $\gamma(d(p,x))$ 沿 γ 与 p 点共轭, 这与 γ 是射线矛盾. 因此便证明了 p 是极点. 假设 F 是 T_pM 上的线性等距, 记 $f:=\exp_p\circ F\circ\exp_p^{-1}$. 由于 $\mathrm{d}f_p$ 为线性等距是平凡的, 故可以证明对任意不同于 p 的点 q, $\mathrm{d}f_q$ 为线性等距. 这表明 f 是 M 上的等距. 取定点 $q(\neq p)$, 设 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$ 是从 $p=\gamma(0)$ 出发且通过 $q=\gamma(t_0)$ 的单位速度测地线; 这里记 $t_0:=d(p,q)$. 由定义, 对任意的 t, $f(\gamma(t))=\exp_p tF(\dot\gamma(0))$. 于是

$$\mathrm{d}f_q(\dot\gamma(t_0))=\dot{\bar\gamma}(t_0), \tag{7.1.1}$$

其中 $\bar\gamma(t)=\exp_p tF(\dot\gamma(0))$. 设 $v(\theta)$ 为 S_pM 中从 $v(0)=\dot\gamma(0)$ 出发的正定向的单位速度光滑曲线. 于是有 γ 和 $\bar\gamma$ 的测地变分

$$\alpha(t,\theta):=\exp_p tv(\theta), \tag{7.1.2}$$

$$\bar\alpha(t,\theta):=f(\exp_p tv(\theta))=\exp_p tF(v(\theta)). \tag{7.1.3}$$

由以上变分可以分别得到沿 γ 和 $\bar\gamma$ 的 Jacobi 场 $Y(t):=(\partial\alpha/\partial\theta)(t,0)$, $\bar Y(t):=(\partial\bar\alpha/\partial\theta)(t,0)$. 容易看出

$$\bar Y(t_0)=\mathrm{d}f_q(Y(t_0)) \tag{7.1.4}$$

且

$$\begin{aligned} &Y(0)=0,\quad Y'(0)=\dot v(0),\\ &\bar Y(0)=0,\quad \bar Y'(0)=F(\dot v(0)). \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

这里 $Y'(t)$ 和 $\bar Y'(t)$ 分别表示 $Y(t)$ 和 $\bar Y(t)$ 沿 γ 和 $\bar\gamma$ 的共变导数. 而由 Gauss 引理 1.2.1, $Y(t_0)$ 和 $\bar Y(t_0)$ 分别与 $\dot\gamma(t_0)$ 和 $\dot{\bar\gamma}(t_0)$ 正交. 由于对任意的 $t\in[0,t_0]$, $G(\gamma(t))=G(\bar\gamma(t))$, 故 Y 和 $\bar Y$ 满足相同的微分方程. 所以

$$\| Y(t_0)\|=\|\bar Y(t_0)\|. \tag{7.1.6}$$

综合 (7.1.1), (7.1.4) 和 (7.1.6) 可知 $\mathrm{d}f_q$ 为线性等距. 证毕.

定义 7.1.1 对每个 $q\in M\setminus\{p\}$, 记 $\mu_q:[0,\infty)\longrightarrow M$ 为从 p 出发通过 $q=\mu_q(d(p,q))$ 的单位速度测地线, 其中 μ_q 叫做通过 q 的子午线.

设 $\mu : [0,\infty) \longrightarrow M$ 为子午线, 则可以引入 $M \setminus \mu[0,\infty)$ 上的局部标架 (r,θ), 即 $r(q) := d(p,q)$ 且 $\theta(q)$ 表示从 $-\dot{\mu}(0)$ 到 $\dot{\mu}_q(0)$ 的有向角. 标架 (r,θ) 称为 M 上点 p 处的测地极坐标. 由引理 7.1.1, 对每个 $t>0$, 函数

$$g\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

在 $S(p,t)$ 上为常数. 于是光滑函数 $m:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ 可以定义为

$$m(r(q)) := \sqrt{g_q\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}. \tag{7.1.7}$$

由 Gauss 引理 1.2.1 可知

$$g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\mathrm{d}\theta^2. \tag{7.1.8}$$

命题 7.1.1 函数 m 可以延拓为 0 附近的光滑奇函数, 满足 $m'(0)=1$.

证明 设 $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow M$ 为单位速度测地线, $\gamma(0)=p$, 且 $Y(t)$ 为沿 γ 的 Jacobi 场, 满足 $Y(0)=0$, $Y'(0)=\dot{v}(0)$, 其中 $v(\theta)$ 为引理 7.1.1 的证明中所定义的曲线. 则

$$Y(t) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)}$$

对任意的正数 t 成立. 因此

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)} = g(Y(t),E(t))E(t) \tag{7.1.9}$$

对任意的正数 t 成立. 这里 $E(t)$ 表示沿测地线 γ 的单位平行向量场, $E(0)=Y'(0)(=\dot{v}(0))$, 且对每个 t, $E(t)$ 与 $\dot{\gamma}(t)$ 正交. 于是

$$m(t) = g(Y(t),E(t)) \tag{7.1.10}$$

对任意正数 t 成立. 设 F 为 T_pM 上的镜射, $F(\dot{\gamma}(0))=-\dot{\gamma}(0)$. 容易验证

$$\mathrm{d}f_{\gamma(t)}Y(t) = -Y(-t), \quad \mathrm{d}f_{\gamma(t)}E(t) = E(-t) \tag{7.1.11}$$

对任意实数 t 成立, 其中 $f := \exp_p\circ F\circ\exp_p^{-1}$. 由于 f 是 M 上的等距, 故

$$g(Y(t),E(t)) = g(\mathrm{d}f_{\gamma(t)}Y(t),\mathrm{d}f_{\gamma(t)}E(t)) = -g(Y(-t),E(-t)). \tag{7.1.12}$$

由等式 (7.1.10) 和 (7.1.12) 可知 $m(t)$ 可延拓为光滑奇函数, 且 $m'(0)=1$. 证毕.

因为 Jacobi 场 $Y(t)$ 满足 (1.4.1), 故有

推论 7.1.1 函数 m 满足以下微分方程:

$$m'' + Gm = 0, \tag{7.1.13}$$

初始条件为 $m(0) = 0$, $m'(0) = 1$.

引理 7.1.2 设 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 则存在光滑函数 h, 满足

$$f(x) = f(a) + (x-a)h(x).$$

证明 由以下等式可知引理的结论是平凡的:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx + (1-t)a)\mathrm{d}t \\ &= (x-a)\int_0^1 f'(tx + (1-t)a)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

证毕.

引理 7.1.3 设 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为光滑偶函数, 则函数 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(\sqrt{x^2+y^2})$ 是光滑的.

证明 设 n 为任意取定的正整数. 因为 f 为偶函数, 故对任意正整数 k, $f^{(2k-1)}(0) := (\mathrm{d}^{2k-1}/\mathrm{d}x^{2k-1})f(0) = 0$. 因此由引理 7.1.2 知, 存在光滑函数 $R_n(t)$, 使得

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}\frac{f^{(2k)}}{(2k)!}(0) + t^{2n}R_n(t).$$

对 n 作归纳法, 容易证明函数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^n R_n(\sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbb{R}$$

为 C^n 的. 因此对任意正整数 n, F 为 C^n 的. 证毕.

命题 7.1.1 的逆命题也成立.

定理 7.1.1 设光滑函数 $m : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ 可延拓为 0 附近的光滑奇函数, 满足 $m'(0) = 1$. 则 $\mathbb{R}^2$ 上的黎曼度量 $g = \mathrm{d}r_0^2 + m^2(r_0)\mathrm{d}\theta_0^2$ 定义了一个旋转曲面, 其顶点为 $\mathbb{R}^2$ 的原点. 这里 (r_0, θ_0) 表示欧氏平面 $(\mathbb{R}^2, g_0)$ 原点处的测地极坐标.

证明 设 (x,y) 为 $(\mathbb{R}^2, g_0)$ 的标准标架, 即 $x = r_0\cos\theta_0$, $y = r_0\sin\theta_0$. 则直接计算可得

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= 1 + y^2 f(r), \\ g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= -xyf(r), \\ g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= 1 + x^2 f(r), \end{aligned} \tag{7.1.14}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $f(r)=(m^2(r)-r^2)/r^4$. 由 m 的假设和引理 7.1.2 知, 存在光滑偶函数 $k(t)$ 满足 $m(r)=r+r^3k(r)$. 因此

$$f(r)=k(r)(2+r^2k(r))$$

是光滑偶函数. 由引理 7.1.3, 函数

$$\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto f(\sqrt{x^2+y^2})\in\mathbb{R}$$

在原点附近光滑. 由 (7.1.14) 知, g 为 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑黎曼度量. 进而, 每条从原点出发的测地线 $\theta_0=$ 常数 可在 $0\leqslant r<\infty$ 上定义. 由定理 1.7.3, g 定义了一个完备黎曼度量, 所以 $(\mathbb{R}^2,g)$ 是以原点为顶点的旋转曲面. 证毕.

以下 (r,θ) 表示旋转曲面 (M,g) 的顶点 p 处的测地极坐标集. 设 $\gamma:I\longrightarrow M$ 为测地线, 任给 $t\in I$, $\gamma(t)\neq p$, 其中 I 表示区间. 定义

$$r(t):=r(\gamma(t)),\qquad \theta(t):=\theta(\gamma(t)).$$

命题 7.1.2 设 $\gamma:I\longrightarrow M$ 为测地线, 满足任给 $t\in I$, $\gamma(t)\neq p$. 则 γ 满足以下的微分方程:

$$r''-mm'(\theta')^2=0, \tag{7.1.15}$$

$$\theta''+2\frac{m'r'\theta'}{m}=0. \tag{7.1.16}$$

反之, 任一满足 (7.1.15) 和 (7.1.16) 的光滑曲线 $(r(s),\theta(s))$ 是 M 上的测地线.

证明 由张量形式的计算, 记

$$g_{11}:=g\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

$$g_{12}=g_{21}:=g\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right),$$

$$g_{22}:=g\left(\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

则由 (7.1.8) 式得

$$g_{11}=1,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=m^2. \tag{7.1.17}$$

因此对 $i=1,2$, Christoffel 符号

$$\Gamma^1_{i1}=\Gamma^1_{1i}=\Gamma^2_{ii}=0,$$

且

$$\Gamma^1_{22}=-mm',\qquad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{m'}{m}.$$

由测地线的微分方程 (1.2.1) 可得 (7.1.15) 和 (7.1.16). 反之是平凡的. 证毕.

由 (7.1.16) 可知对任意的 $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m^2(r(t))\theta'(t)) = 0. \tag{7.1.18}$$

因此存在常值 v, 使得对任意的 $t \in I$,

$$\theta'(t) = \frac{v}{m^2(r(t))}. \tag{7.1.19}$$

若 $\xi(t)$ 表示测地线 $\gamma(t)$ 和通过 $\gamma(t)$ 的平行线即 $S(p, d(p, \gamma(t)))$ 所成的角, 则可得 Clairaut 关系

$$m(r(t))\cos\xi(t) = v,$$

其中任意 $t \in I$. 综合以上可得:

定理 7.1.2 (Clairaut) 假设测地线 $\gamma : I \longrightarrow M$ 满足对任意的 $t \in I$, $\gamma(t) \neq p$. 则存在常值 v, 使得对任意的 $t \in I$,

$$m(r(t))\cos\xi(t) = v. \tag{7.1.20}$$

定义 7.1.2 (7.1.20) 式中的常值 v 称为测地线 γ 的 Clairaut 常数.

注意到 Clairaut 常数为零当且仅当测地线与一条子午线相切. 因此, 若一条测地线的 Clairaut 常数非零, 则这条测地线不经过顶点.

引理 7.1.4 平行线 $S(p, t_0)$ 是测地线当且仅当 $m'(t_0) = 0$.

证明 假设平行线 $S(p, t_0)$ 是测地线, 则可以表示为

$$r(t) = t_0, \quad \theta(t) = t. \tag{7.1.21}$$

由 (7.1.15) 可知 $m'(t_0) = 0$. 反之, 由 (7.1.21) 定义的曲线满足 (7.1.15) 和 (7.1.16); 因此 $S(p, t_0)$ 是测地线. 证毕.

引理 7.1.5 设 $\gamma : I \longrightarrow M$ 是测地线, 若 γ 不是平行线, 则 r' 的零点是离散的. 进而, 若对某个 $s_0 \in I$, $r' = 0$, 则 $m'(r(s_0))$ 非零; 见图 7.1.1.

证明 若 γ 与一条子午线相切, 则结论是平凡的. 因此我们假设对任意 $t \in I$, $\gamma(t) \neq p$. 假设对某个 $s_0 \in I$, $r'(s_0) = 0$. 则 γ 与平行线 $S(p, r(s_0))$ 相切. 由于 γ 不是平行线, 故由引理 7.1.4 知 $m'(r(s_0))$ 非零. 由 (7.1.15) 和 (7.1.19) 知 $r''(s_0)$ 非零. 因此 r' 的零点是离散的. 由 $r'(s_0) = 0$ 可知 γ 与平行线 $S(p, r(s_0))$ 相切, 因而由引理 7.1.4 可得第二个结论. 证毕.

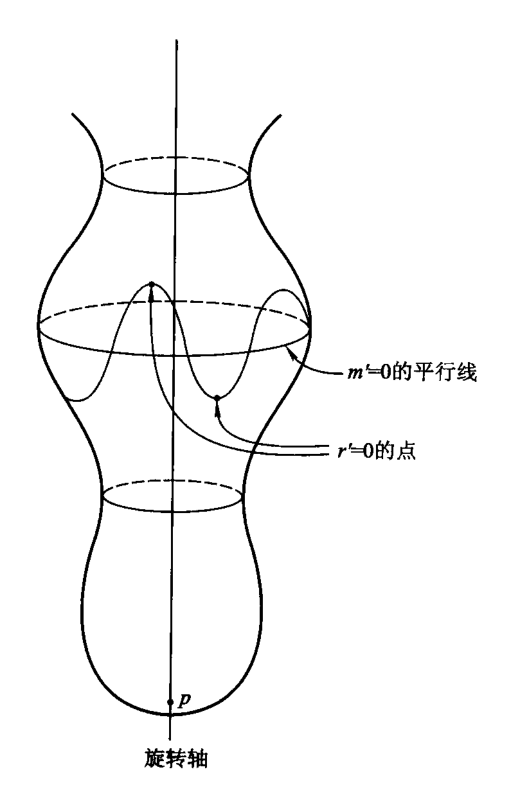


图 7.1.1

引理 7.1.6 设测地线 $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow M$ 不与任何子午线相切. 若在两个不同的参数值处 $r'=0$, 则存在绕 p 点的旋转 T 和非零常数 b, 使得对任意的 $t\in\mathbb{R}$,

$$T(\gamma(t))=\gamma(t+b).$$

特别地, $\gamma\mid_{[0,\infty)}$ 不是射线.

证明 假设在 $t=s_0$ 处 $r'=0$, 则 γ 与平行线 $S(p,r(s_0))$ 相切. 于是存在 M 上的镜射 f_0 (即 $\exp_p^{-1}\circ f_0\circ\exp_p$ 是 T_pM 上的镜射), 它确定了通过 $\gamma(s_0)$ 的子午线, 使得对任意的 t, $f_0(\gamma(t))=\gamma(2s_0-t)$. 因此若在两个不同的实数 s_0 和 s_1 处, $r'=0$, 则存在 M 上的两个镜射 f_0 和 f_1, 使得对任意的 t,

$$f_1\circ f_0(\gamma(t))=\gamma(t+2s_1-2s_0);$$

进而, $f_1\circ f_0$ 是绕 p 点的旋转. 证毕.

引理 7.1.7 设测地线 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$ 的 Clairaut 常数为 v, 若 $r_0:=\lim\limits_{t\to\infty}d(p,\gamma(t))$ 有界, 则 $m(r_0)=|v|$ 且 $m'(r_0)=0$; 见图 7.1.2. 因此 $S(p,r_0)$ 是测地线.

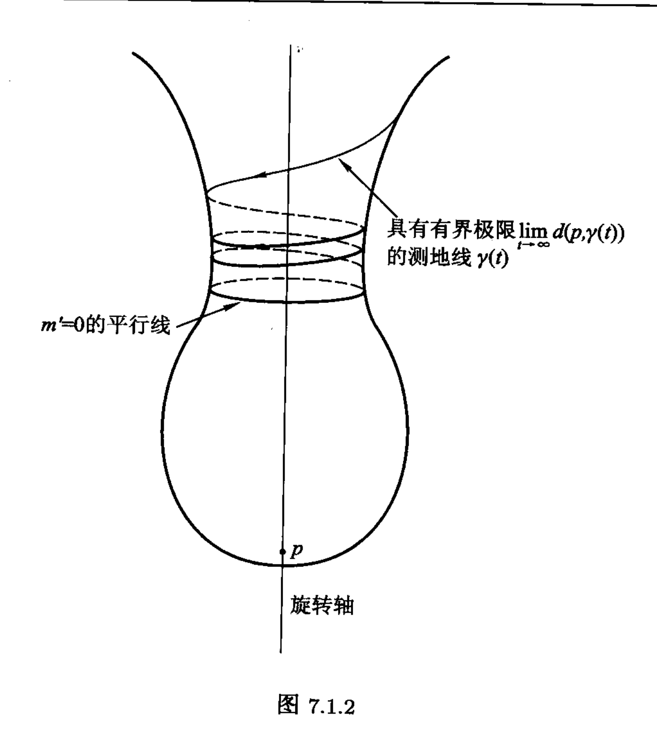


图 7.1.2

证明 由假设可知, γ 的 Clairaut 常数非零, 且对任意的 $t \in [0,\infty)$, $\gamma(t) \neq p$. 若 γ 是平行线, 则由引理 7.1.4 知结论是平凡的. 因此可以假设 γ 不是平行线. 由引理 7.1.6 知, 存在正常数 t_0, 使得在 $[t_0,\infty)$ 上 $r' \neq 0$. 不失一般性, 假设 γ 是单位速度测地线, 则对任意的 $t \in [0,\infty)$,

$$(r'(t))^2 + m^2(r(t))(\theta')^2 = 1.$$

由 (7.1.19) 可知在 $[t_0,\infty)$ 上,

$$r' = \sqrt{1-\frac{v^2}{m^2}} \quad \text{或} \quad r' = -\sqrt{1-\frac{v^2}{m^2}}$$

有一个成立. 若 $m(r_0) \neq |v|$, 则存在正常数 δ, 使得在 $[t_0,\infty)$ 上

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{m^2(r(t))}} \geqslant \delta.$$

因此在 $[t_0,\infty)$ 上 $r' \geqslant \delta$ 或 $r' \leqslant -\delta$. 但这与 $0 \leqslant r_0 < \infty$ 矛盾. 因此 $m(r_0) = |v|$ 且特别地, $\lim\limits_{t\to\infty} r'(t) = 0$. 假设 $m'(r_0) \neq 0$, 由于 $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = r_0$, 故存在常数

$t_1 \geqslant t_0$, 使得在 $[t_1, \infty)$ 上,

$$\frac{|v|}{2} = \frac{m(r_0)}{2} \leqslant m(r(t)) \leqslant 2m(r_0) = 2|v|,$$
$$\frac{|m'(r_0)|}{2} \leqslant |m'(r(t))| \leqslant 2|m'(r_0)|.$$

因而由 (7.1.15) 和 (7.1.19) 可得, 在 $[t_1, \infty)$ 上

$$|r''| \geqslant \frac{|m'(r_0)|}{16m(r_0)}.$$

这一不等式说明 $\lim_{t\to\infty} r'(t) = \pm\infty$. 然而 $\lim_{t\to\infty} r'(t) = 0$. 因此便证明了 $m'(r_0) = 0$. 由引理 7.1.4 容易得到第二个结论. 证毕.

定义 7.1.3　定义 $\{(r,v); r > 0, m(r) > |v|\}$ 上的函数 $f(r,v)$, $g(r,v)$ 为

$$f(r,v) := \frac{v}{m(r)\sqrt{m^2(r) - v^2}}, \quad g(r,v) := \frac{m(r)}{\sqrt{m^2(r) - v^2}}. \tag{7.1.22}$$

命题 7.1.3　设单位速度测地线 $\gamma : [a,b) \longrightarrow M$ 的 Clairaut 常数 v 非零. 若 $r'(t)$ 在 $[a,b)$ 上非零, 则以 r 为参数的测地线 γ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \epsilon f(r,v), \tag{7.1.23}$$

且

$$\theta(b) - \theta(a) \equiv \epsilon \int_{r(a)}^{r(b)} f(r,v)\mathrm{d}r \qquad \mathrm{mod}\ \ 2\pi, \tag{7.1.24}$$

$$b - a = \epsilon \int_{r(a)}^{r(b)} g(r,v)\mathrm{d}r, \tag{7.1.25}$$

其中 ϵ 为 $r'(t)$ 的符号, $t \in [a,b)$.

证明　因为 γ 以弧长为参数, 故对任意 $t \in [a,b)$,

$$r'(t)^2 + m^2(r(t))\theta'^2 = 1.$$

因此由 (7.1.19) 可知

$$r'(t) = \frac{\epsilon}{g(r(t),v)}. \tag{7.1.26}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\theta'}{r'} = \epsilon f(r,v).$$

若 $r'(b) \neq 0$, 则由 (7.1.23) 和 (7.1.26) 得

$$b-a=\int_a^b \mathrm{d}t=\int_{r(a)}^{r(b)} \frac{\mathrm{d}r}{r'(t)}=\epsilon\int_{r(a)}^{r(b)} g(r,v)\mathrm{d}r,$$

$$\theta(b)-\theta(a)\equiv\int_a^b \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r=\epsilon\int_{r(a)}^{r(b)} f(r,v)\mathrm{d}r \qquad \mathrm{mod}\ \ 2\pi.$$

若 $r'(b)=0$, 取严格单调递增序列 $\{b_i\}$ 收敛于 b, 可得 (7.1.24) 和 (7.1.25). 由于 $m(r(b))=\mid v\mid$, 故 (7.1.24) 和 (7.1.25) 中的积分是反常积分, 但由于 $m'(r(b))\neq 0$, 所以上述反常积分都是有限的. 证毕.

定义 7.1.4 对每个 $q\in M\setminus\{p\}$, 设 $\tau_q:[0,\infty)\longrightarrow M$ 是从 $q=\tau_q(0)$ 出发经过 $p=\tau_q(d(p,q))$ 的单位速度测地线. 对每个正数 t, 记 $L(t)$ 为 $S(p,t)$ 的长度, 它等于 $2\pi m(t)$.

引理 7.1.8 若 $\liminf\limits_{t\to\infty} L(t)=0$, 则对任意一个不同于 p 的点 q, μ_q 的子射线 $\mu_q\mid_{[d(p,q),\infty)}$ 是唯一一条从 q 出发的射线.

证明 设 $\{t_i\}$ 为发散序列, 且 $\lim\limits_{i\to\infty} L(t_i)=0$. 设 q 为任意不同于 p 的点. 为简便起见, 记

$$\rho:=d(p,q).$$

由三角不等式得

$$\begin{aligned}d(q,\tau_q(t_i+\rho)) &\leqslant d(q,\mu_q(t_i))+d(\mu_q(t_i),\tau_q(t_i+\rho))\\ &\leqslant t_i-\rho+\frac{1}{2}L(t_i).\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty} L(t_i)=0$, 故对充分大的 i, $d(q,\tau_q(t_i+\rho))<t_i$. 这表明 τ_q 不是射线. 设从 q 出发的测地线 γ 不与任何子午线相切. 由于 $\liminf\limits_{t\to\infty} L(t)=\liminf\limits_{t\to\infty} 2\pi m(t)=0$, 由 (7.1.20) 可知 γ 的像是有界的, 因此 γ 不是射线. 故测地线 $\mu_q\mid_{[\rho,\infty)}$ 是唯一一条从 q 出发的射线. 证毕.

引理 7.1.9 假设 $\int_1^\infty L^{-2}(t)\mathrm{d}t$ 是无限的, 设 q 为任一不同于顶点的点. 若从 q 出发的测地线 γ 不与经过 q 的子午线相切, 则 γ 不是射线. 特别地, 顶点是唯一的极点.

证明 由于 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$ 不与 μ_q 相切, 故 γ 的 Clairaut 常数 v 不为 0. 由引理 7.1.6, 可以假设

$$\lim_{t\to\infty} r(t)=+\infty,$$

且存在正常数 b, 使得 r' 在 $[b,\infty)$ 上为正. 由 (7.1.24) 得, 对任意实数 $t>b$,

$$\theta(t)-\theta(b)\equiv\int_{r(b)}^{r(t)} f(r,v)\mathrm{d}r \qquad \mathrm{mod}\ \ 2\pi.$$

由于对某个 $s>b$, $L(t)=2\pi m(t)$, $|\ \theta(s)-\theta(b)\ |>\pi$, 因此 γ 不是射线. 特别地, q 不是极点. 证毕.

§2 Jacobi 场

本节中选取不同于顶点的点 q, 为引出沿一条从 q 出发的测地线的 Jacobi 场, 我们需要一些记号. 记

$$\rho:=d(p,q). \tag{7.2.1}$$

设 $\{e_1,e_2\}$ 为 T_qM 的规范正交基, 使得

$$e_1:=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_q,\qquad e_2:=\frac{1}{m(\rho)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_q. \tag{7.2.2}$$

对每个 $v\in[-m(\rho),m(\rho)]$, 设 $\beta_v,\gamma_v:[0,\infty)\longrightarrow M$ 表示从 q 出发的单位速度测地线, 其在 $t=0$ 处的速度向量为

$$\dot\beta_v(0)=\frac{1}{g(\rho,v)}e_1+\frac{v}{m(\rho)}e_2,\quad \dot\gamma_v(0)=-\frac{1}{g(\rho,v)}e_1+\frac{v}{m(\rho)}e_2. \tag{7.2.3}$$

这里 $g(\rho,v)$ 如 (7.1.22) 所定义. 则由 (7.1.20) 知每个 β_v 和 γ_v 的 Clairaut 常数均为 v. 由于 β_v 和 γ_v 为弧长参数表示, 故

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}r(\beta_v(t))\right)^2+m^2(r(\beta_v(t)))\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(\beta_v(t))\right)^2&=1,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}r(\gamma_v(t))\right)^2+m^2(r(\gamma_v(t)))\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(\gamma_v(t))\right)^2&=1.\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

由于若 $v\in(-m(\rho),m(\rho))$, 则测地线 β_v 和 γ_v 均光滑依赖于 v, 故可得沿 β_v 和 γ_v 的 Jacobi 场 X_v 和 Y_v:

$$X_v(t):=\frac{\partial}{\partial v}(\beta_v(t)),\qquad Y_v(t):=\frac{\partial}{\partial v}(\gamma_v(t)). \tag{7.2.5}$$

因为对任意的 $v\in[-m(\rho),m(\rho)]$, $\beta_v(0)=q=\gamma_v(0)$, 故

$$X_v(0)=Y_v(0)=0. \tag{7.2.6}$$

若 X_v' 和 Y_v' 分别表示沿 β_v 和 γ_v 的共变导数, 则有

$$X_v'(0)=-f(\rho,v)e_1+\frac{1}{m(\rho)}e_2,\qquad Y_v'(0)=f(\rho,v)e_1+\frac{1}{m(\rho)}e_2, \tag{7.2.7}$$

其中 $f(\rho,v)$ 如 (7.1.22) 所定义.

命题 7.2.1 设 $\beta:[0,s]\longrightarrow M$ 为 (7.2.3) 所定义的测地线 β_c, $c\in(-m(\rho),m(\rho))$, 且满足 $p\notin\beta[0,s)$. 若 $\gamma'(t)$ (即 $\mathrm{d}r(\beta(t))/\mathrm{d}t$) 在 $[0,s)$ 上非零, 则在 $[0,s)$ 上由 (7.2.5) 定义的 Jacobi 场 X_c 可如下给出:

$$X_c(t)=r'(t)\int_\rho^{r(t)}\frac{m(r)}{(m^2(r)-c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\left\{-c\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\beta(t)}+r'(t)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\beta(t)}\right\}. \quad (7.2.8)$$

证明 任取正数 $s_1<s$, 则由假设知, 存在正数 δ, 使得对任意满足 $|v-c|<\delta$ 的 v, 函数

$$\frac{\partial}{\partial t}r(\beta_v(t))$$

在 $[0,s_1]$ 上非零. 记 $r(t,v):=r(\beta_v(t))$, $\theta(t,v):=\theta(\beta_v(t))$. 特别地, 记 $r(t):=r(t,c)$, $\theta(t):=\theta(t,c)$. 由于 r' 在 $[0,s_1]$ 上为正, 故

$$\frac{\partial}{\partial t}r(t,v)$$

对任意的 $t\in[0,s_1]$ 和任意满足 $|v-c|<\delta$ 的 v 为正. 因此由 (7.1.19) 和 (7.2.4) 可知, 对任意满足 $|v-c|<\delta$ 的 v,

$$\frac{\partial}{\partial t}r(t,v)=\frac{1}{g(r(t,v),v)} \quad (7.2.9)$$

在 $[0,s_1]$ 上成立. 由 (7.1.25) 得

$$t=\int_\rho^{r(t,v)}g(r,v)\mathrm{d}r \quad (7.2.10)$$

对任意的 $t\in[0,s_1]$ 和任意满足 $|v-c|<\delta$ 的 v 成立. 对 (7.2.10) 式关于 v 求微分得

$$\frac{\partial r}{\partial v}(t,c)=-cr'(t)\int_\rho^{r(t)}\frac{m(r)}{(m^2(r)-c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r. \quad (7.2.11)$$

而由命题 7.1.3 得

$$\theta(t,v)\equiv\theta(q)+\int_\rho^{r(t,v)}f(r,v)\mathrm{d}r \qquad \mathrm{mod}\ \ 2\pi; \quad (7.2.12)$$

于是由 (7.2.11) 知

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,c)=r'(t)^2\int_\rho^{r(t)}\frac{m(r)}{(m^2(r)-c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r. \quad (7.2.13)$$

由 (7.2.11) 和 (7.2.13) 可知, 对任意的 $t\in[0,s)$, 有 (7.2.8) 式成立. 证毕.

利用与命题 7.2.1 类似的讨论可知以下结论成立.

命题 7.2.2　假设 $\gamma:[0,s]\longrightarrow M$ 是如 (7.2.3) 所定义的测地线 γ_c, $c\in(-m(\rho),m(\rho))$, 且满足 $p\notin\gamma[0,s)$. 若 $r'(t)(=\mathrm{d}r(\gamma(t))/\mathrm{d}t)$ 在 $[0,s)$ 上非零, 则 (7.2.5) 所定义的 Jacobi 场 Y_c 在 $[0,s)$ 上可如下给出

$$Y_c(t)=-r'(t)\int_\rho^{r(t)}\frac{m(r)}{(m^2(r)-c^2)^{3/2}}\mathrm{d}r\left\{-c\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\gamma(t)}+r'(t)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)}\right\}.\tag{7.2.14}$$

推论 7.2.1　假设 $c\neq0$. 若 $r'(s)$ 为零, 则

$$Y_c(s)=\frac{c}{|c|\,m'(r(s))}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\gamma(s)}.\tag{7.2.15}$$

特别地, 对每个满足 $|v|\in(0,m(\rho))$ 的 γ_v, 若 $\partial r(\gamma_v(t))/\partial t$ 在 $[0,s)$ 上不为零, 则 $\gamma_v|_{[0,s]}$ 没有 q 的沿 γ_v 的共轭点.

注 7.2.1　由引理 7.1.5 知 $m'(r(s))\neq0$.

推论 7.2.1 的证明　由 γ_v 的定义和 (7.2.3) 式得

$$r'(t)=-\frac{1}{g(r(t),c)}.\tag{7.2.16}$$

由 l'Hôpital 定理,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to s-0}r'(t)\int_\rho^{r(t)}\frac{m}{(m^2-c^2)^{3/2}}\mathrm{d}r&=\lim_{t\to s-0}\frac{1}{r'}\int_\rho^{r(t)}\frac{m}{(m^2-c^2)^{3/2}}\mathrm{d}r\\&=\lim_{t\to s-0}\frac{-(r')^3m(r(t))}{r''(m^2-c^2)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{7.2.17}$$

因此由 (7.2.16) 得

$$\lim_{t\to s-0}r'(t)\int_\rho^{r(t)}\frac{m}{(m^2-c^2)^{3/2}}\mathrm{d}r=\frac{1}{r''(s)m^2(r(s))}.\tag{7.2.18}$$

由 (7.1.15) 和 (7.1.19) 可知

$$r''(t)=\frac{c^2m'(r(t))}{m^3(r(t))}.\tag{7.2.19}$$

又由 (7.2.18) 和 (7.2.19) 得

$$\lim_{t\to s-0}r'(t)\int_\rho^{r}\frac{m}{(m^2-c^2)^{3/2}}\mathrm{d}r=\frac{m(r(s))}{c^2m'(r(s))}.\tag{7.2.20}$$

由 (7.2.16) 知 $m(r(s))=|c|$. 因此由 (7.2.14) 和 (7.2.20) 可得 (7.2.15). 证毕.

命题 7.2.3 设 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$ 为 (7.2.3) 所定义的测地线 γ_c, $|c|\in(0,m(\rho))$. 假设存在正数 s_1, 使得 $s_0\in(0,s_1)$ 为 r' 在 $[0,s_1]$ 上的唯一零点. 则 (7.2.5) 中定义的 Jacobi 场 Y_c 在 $(s_0,s_1]$ 上可如下给出

$$Y_c(t)=\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,c)\left\{-cg(r(t),c)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\gamma(t)}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)}\right\},\tag{7.2.21}$$

其中

$$\theta(t,v)=\theta(\gamma_v(t)).\tag{7.2.22}$$

证明 因为 $r'(s_0)=0$, 故 γ 与平行线 $S(p,r(s_0))$ 相切. 由引理 7.1.4, $m'(r(s_0))$ 非零. 于是由 (7.1.15) 和 (7.1.19) 可知

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}r(t,c)$$

在 $t=s_0$ 处非零. 这里我们记

$$r(t,v)=r(\gamma_v(t)).\tag{7.2.23}$$

由反函数定理知, 对某个满足 $\delta<|c|$ 的正数 δ, 存在 $(c-\delta,c+\delta)$ 上的光滑函数 $\bar{s}$, 满足

$$\bar{s}(v)=\min\{t>0;\partial r(t,v)/\partial t=0\},$$

其中 $v\in(c-\delta,c+\delta)$, $\bar{s}(c)=s_0$. 如若需要, 取更小的 δ, 可以假设对每个 $v\in(c-\delta,c+\delta)$, $\bar{s}(v)$ 是 $\partial r(t,v)/\partial t$ 在 $[0,s_1]$ 上的唯一零点. 由 (7.1.24) 和 (7.1.25) 知, 对任意的 $v\in(c-\delta,c+\delta)$,

$$\theta(t,v)\equiv\theta(q)+\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{\rho}f(r,v)\mathrm{d}r+\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{r(t,v)}f(r,v)\mathrm{d}r\qquad\bmod\ 2\pi,\tag{7.2.24}$$

且在 $(\bar{s}(v),s_1]$ 上

$$t=\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{\rho}g(r,v)\mathrm{d}r+\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{r(t,v)}g(r,v)\mathrm{d}r.\tag{7.2.25}$$

由于

$$g(r,v)=\frac{1}{g(r,v)}+vf(r,v),$$

由 (7.2.25) 可得

$$\begin{aligned}t=&\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{\rho}\frac{1}{g(r,v)}\mathrm{d}r+\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{r(t,v)}\frac{1}{g(r,v)}\mathrm{d}r\\&+v\left(\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{\rho}f(r,v)\mathrm{d}r+\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{r(t,v)}f(r,v)\mathrm{d}r\right).\end{aligned}\tag{7.2.26}$$

对 (7.2.26) 式关于 v 微分, 可得

$$0=\frac{1}{g(r(t,v),v)}\frac{\partial r}{\partial v}(t,v)+v\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,v). \tag{7.2.27}$$

注意到在 $r=r(\bar{s}(v),v)$ 处

$$\frac{1}{g(r,v)}=\frac{\sqrt{m^2(r)-v^2}}{m(r)}=0,$$

且

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{g(r,v)}=-f(r,v).$$

因此对任意的 $t\in(\bar{s}(v),s_1]$ 和 $v\in(c-\delta,c+\delta)$, 有

$$\frac{\partial r}{\partial v}(t,v)=-vg(r(t,v),v)\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,v). \tag{7.2.28}$$

由 (7.2.28) 式可得 (7.2.21) 式. 证毕.

设 a_1 为充分小的正数, 使得 m' 在 $[0,a_1]$ 上为正. 由命题 7.1.1 知, $m'(0)=1$. 设 $k:[0,m(a_1)]\longrightarrow\mathbb{R}$ 为 $m\,|_{[0,a_1]}$ 的反函数. 由推论 7.1.1 得

$$k'(0)=1,\quad k''(0)=0.$$

由引理 7.1.2, 存在 $[0,m(a_1)]$ 上的光滑函数 h, 满足

$$k'(t)=1+t^2h(t). \tag{7.2.29}$$

命题 7.2.4　设 Y_0 是沿 $\tau_q=\gamma_v$ 的由 (7.2.5) 当 $v=0$ 时定义的 Jacobi 场 Y_v. 则 Y_0 在 (ρ,∞) 上如下给出

$$\begin{aligned}Y_0(t)=\Bigg\{&-\frac{2}{m(a_1)}+2m(a_1)h(m(a_1))-2\int_0^{m(a_1)}th'(t)\mathrm{d}t\\&+\int_{a_1}^{\rho}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r+\int_{a_1}^{t-\rho}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r\Bigg\}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\tau_q(t)}.\end{aligned} \tag{7.2.30}$$

证明　任取 $t>\rho$, 由于 Y_v 光滑依赖于 v, 故由命题 7.2.3 可知在 (ρ,∞) 上

$$Y_0(t)=\lim_{v\longrightarrow+0}Y_v(t)=\lim_{v\longrightarrow+0}\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,v)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\tau_q(t)}. \tag{7.2.31}$$

若记 $m(r)=t$, 则对任意充分小的正数 v, 由分部积分得

$$\begin{aligned}\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{a_1}f(r,v)\mathrm{d}r&=\int_v^{m(a_1)}\left(\arccos\frac{v}{t}\right)'+v\left(\sqrt{t^2-v^2}\right)'h(t)\mathrm{d}t\\&=\arccos\frac{v}{m(a_1)}+v\sqrt{m(a_1)^2-v^2}h(m(a_1))\\&\quad-v\int_v^{m(a_1)}\sqrt{t^2-v^2}h'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.2.32}$$

于是有

$$\lim_{v\to+0}\frac{\partial}{\partial v}\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{a_1} f(r,v)\mathrm{d}r = -\frac{1}{m(a_1)} + m(a_1)h(m(a_1)) - \int_0^{m(a_1)} th'(t)\mathrm{d}t. \tag{7.2.33}$$

由 (7.2.24) 式得

$$\lim_{v\to+0}\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,v) = 2\lim_{v\to+0}\frac{\partial}{\partial v}\int_{r(\bar{s}(v),v)}^{a_1} f(r,v)\mathrm{d}r$$
$$+\lim_{v\to+0}\frac{\partial}{\partial v}\int_{a_1}^{\rho} f(r,v)\mathrm{d}r + \lim_{v\to+0}\frac{\partial}{\partial v}\int_{a_1}^{r(t,v)} f(r,v)\mathrm{d}r. \tag{7.2.34}$$

综合 (7.2.31), (7.2.33) 和 (7.2.34) 的结论可得 (7.2.30). 证毕.

推论 7.2.2 若 $\int_1^\infty L(t)^{-2}\mathrm{d}t$ 有限, 则存在正数 δ, 使得对任意满足 $0 < d(p,q) \leqslant \delta$ 的点 q, 不存在沿 τ_q 的 q 的共轭点. 若 $\int_1^\infty L(t)^{-2}\mathrm{d}t$ 无限, 则对任意不同于 p 的点 q, 存在 q 的沿 τ_q 的共轭点. 进而, 测地线 $\mu_q|_{[d(p,q),\infty)}$ 是从 q 出发的唯一射线.

证明 假设

$$\int_1^\infty \frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t$$

有限, 则由 $L(t) = 2\pi m(t)$ 可知

$$\int_{a_1}^\infty \frac{1}{m^2}\mathrm{d}r$$

也有限. 选取充分小的正数 δ, 使得

$$-\int_\delta^{a_1}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r + \int_{a_1}^\infty \frac{1}{m^2}\mathrm{d}r - \frac{2}{m(a_1)}$$
$$+2m(a_1)h(m(a_1)) - 2\int_0^{m(a_1)} th'(t)\mathrm{d}t < 0. \tag{7.2.35}$$

则对任意满足 $0 < d(p,q) \leqslant \delta$ 的 q 点和任意的 $t > d(p,q)$, 由 (7.2.30) 和 (7.2.35) 可知 $Y_0(t)$ 非零. 由于 p 为极点, 故 Y_0 在 $(0,\rho]$ 上不为零. 因此, 对任意满足 $0 < d(p,q) \leqslant \delta$ 的点 q, 不存在沿 τ_q 的 q 的共轭点. 假设

$$\int_1^\infty \frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t$$

无限. 则

$$\int_{a_1}^\infty \frac{1}{m^2(r)}\mathrm{d}r$$

也无限. 取不同于 p 的任意一点 q; 由 (7.2.30) 式知, 存在 $t_1 > \rho$, 使得 $Y_0(t_1) = 0$. 因此存在 q 的沿 τ_q 的共轭点. 由引理 7.1.9 容易得出推论的最终结果. 证毕.

以下我们假设

$$\liminf_{t\to\infty} L(t)$$

非零. 由于 $L(t)=2\pi m(t)$, 如若需要, 取更小的正数 a_1, 可以假设

$$m(t)>m(a_1), \tag{7.2.36}$$

其中 $t>a_1$. 假设点 q 满足 $\rho<a_1$. 则由 a_1 的选取可知, 对每个 $v\in(0,m(\rho))$, 函数

$$\frac{\partial r}{\partial t}(t,v)$$

在 $t=t(v)$ 处具有唯一的零点, 其中函数 $r(t,v)$ 由 (7.2.23) 式所定义, 且 $t(v)$ 是 $r(t,v)=k(v)$ 在 $t>0$ 的唯一解. 几何上, 对每个 $v\in(0,m(\rho))$, γ_v 与唯一的平行线 $S(p,k(v))$ 相切于唯一一点 $\gamma_v(t(v))$. 由 (7.1.25) 得

$$t(v)=\int_{k(v)}^{\rho} g(r,v)\mathrm{d}r.$$

定义 7.2.1 对每个正数 $\rho<a_1$, $\{(r,v);m(\rho)>v>0,r>k(v)\}$ 上的函数 $\phi_\rho(r,v)$ 定义为

$$\phi_\rho(r,v)=\int_{k(v)}^{\rho} f(r,v)\mathrm{d}r+\int_{k(v)}^{r} f(r,v)\mathrm{d}r, \tag{7.2.37}$$

其中 $f(r,v)$ 如 (7.1.22) 中的定义.

命题 7.2.5 设 $\gamma:[0,\infty)\longrightarrow M$ 是 (7.2.3) 中定义的 γ_c 对某个 $c\in(0,m(\rho))$ 的测地线. 若 $\rho<a_1$, 则 (7.2.5) 中定义的 Jacobi 场 Y_c 在 $(t(c),\infty)$ 上可以表示为

$$Y_c(t)=\frac{1}{g^2(r(t),c)}\frac{\partial\phi_\rho}{\partial v}(r(t),c)\left\{-cg(r(t),c)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\gamma(t)}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)}\right\}, \tag{7.2.38}$$

其中 $r(t)=r(\gamma(t))$.

证明 由 (7.2.24) 得

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,v)=\frac{\partial\phi_\rho}{\partial v}(r(t,v),v)+\frac{\partial r}{\partial v}(t,v)f(r(t,v),v), \tag{7.2.39}$$

其中 $\theta(t,v)$, $r(t,v)$ 分别是由 (7.2.22) 和 (7.2.23) 定义的函数. 由 (7.2.28) 可知在 $\{(t,v);t>t(v),0<v<m(\rho)\}$ 上,

$$g^2(r(t,v),v)\frac{\partial\theta}{\partial v}(t,v)=\frac{\partial\phi_\rho}{\partial v}(r(t,v),v). \tag{7.2.40}$$

由命题 7.2.3 便可得到 (7.2.38) 式. 证毕.

引理 7.2.1 在 $\{(r,v); v\in(0,m(\rho)), k(v)<r\leqslant a_1\}$ 上有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}\int_{k(v)}^{r} f(r,v)\mathrm{d}r\\ \leqslant\ &\frac{-1}{\sqrt{m^2(r)-v^2}}(1+v^2h(m(r)))+(2m^2(a_1)+m(a_1))C(m),\end{aligned} \tag{7.2.41}$$

其中

$$C(m):=\max\{|\,h(t)\,|,|\,h'(t)\,|;0\leqslant t\leqslant m(a_1)\} \tag{7.2.42}$$

是与 m 相关的常数.

证明 利用与 (7.2.32) 式相似的过程可得

$$\begin{aligned}\int_{k(v)}^{r} f(r,v)\mathrm{d}r =&\arccos\frac{v}{m(r)}+v\sqrt{m^2(r)-v^2}h(m(r))\\ &-v\int_{v}^{m(r)}\sqrt{t^2-v^2}h'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.2.43}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\int_{k(v)}^{r} f(r,v)\mathrm{d}r =&\frac{-1}{\sqrt{m^2(r)-v^2}}(1+v^2h(m(r)))\\ &+\sqrt{m^2(r)-v^2}h(m(r))\\ &+\int_{v}^{m(r)}\left(\frac{v^2}{\sqrt{t^2-v^2}}-\sqrt{t^2-v^2}\right)h'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.2.44}$$

由于

$$\begin{aligned}\left|\int_{v}^{m(r)}\frac{v^2}{\sqrt{t^2-v^2}}h'(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant C(m)v\int_{v}^{m(r)}\frac{t}{\sqrt{t^2-v^2}}\mathrm{d}t\\ &=C(m)v\sqrt{m^2(r)-v^2},\end{aligned}$$

故可得 (7.2.41) 式. 证毕.

引理 7.2.2 假设

$$\liminf_{t\to\infty} L(t)$$

非零, 且

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{L(t)^2}\mathrm{d}t$$

有限. 则存在正常数 $b<a_1$, 使得对每个正数 $\rho\leqslant b$,

$$\frac{\partial\phi_\rho}{\partial v}(r,v)$$

在 $\{(r,v); r>k(v), m(\rho)>v>0\}$ 上严格负.

注 7.2.2 von Mangoldt 在 [59] 中证明了对双叶旋转双曲面以上引理成立.

引理 7.2.2 的证明 选取正数 $b < a_1$, 满足

$$\frac{1-m^2(b)C(m)}{m(b)} > C_1(m) + (2\pi)^2 g(a_1, m(b))^3 \int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{L^2(t)} \mathrm{d}t, \tag{7.2.45}$$

其中

$$C_1(m) := 2(2m^2(a_1) + m(a_1))C(m) \tag{7.2.46}$$

是与 m 相关的常数. 由于 (7.2.45) 式的右边是正的, 故

$$m^2(b)C(m) < 1. \tag{7.2.47}$$

假设 $r \leqslant a_1$, 由引理 7.2.1,

$$\frac{\partial \phi_\rho}{\partial v}(r, v) \leqslant -\frac{1+v^2h(m(\rho))}{\sqrt{m^2(\rho)-v^2}} + C_1(m) - \frac{1+v^2h(m(r))}{\sqrt{m^2(r)-v^2}}. \tag{7.2.48}$$

由于

$$1 + v^2h(m(r)) \geqslant 1 - m^2(b)C(m) > 0$$

且

$$1 + v^2h(m(\rho)) \geqslant 1 - m^2(b)C(m) > 0,$$

因此由 (7.2.47) 可知

$$\frac{\partial \phi_\rho}{\partial v}(r, v) \leqslant -\frac{1-m^2(b)C(m)}{m(b)} + C_1(m). \tag{7.2.49}$$

又由 (7.2.47) 式, 对每个正的 $\rho \leqslant b$,

$$\frac{\partial \phi_\rho}{\partial v}(r, v)$$

在 $\{(r, v); 0 < v < m(\rho), a_1 \geqslant r > k(v)\}$ 上为负. 假设 $r > a_1$, 由引理 7.2.1 得

$$\frac{\partial \phi_\rho}{\partial v}(r, v) \leqslant -\frac{1-m^2(b)C(m)}{m(b)} + C_1(m) + \int_{a_1}^{r} \frac{m}{(m^2-v^2)^{3/2}} \mathrm{d}r.$$

由于在 $[a_1, \infty)$ 上

$$\frac{m(r)}{(m^2(r)-v^2)^{3/2}} \leqslant \frac{g^3(a_1, v)}{m^2(r)} < \frac{(2\pi)^2 g^3(a_1, m(b))}{L^2(r)},$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial v}(r, v) \leqslant & -\frac{1-m^2(b)C(m)}{m(b)} + C_1(m) \\ & + (2\pi)^2 g^3(a_1, m(b)) \int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{L^2(t)} \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{7.2.50}$$

由 b 的选取可知 (7.2.50) 的右边为负. 证毕.

引理 7.2.3 设 M 是以 p 为顶点的旋转曲面. 若点 $q(\neq p)$ 是极点, 则任何满足 $d(p,x)\leqslant d(p,q)$ 的点 x 都是极点. 因此 M 上极点的集合组成一个以 p 为中心的闭球.

证明 由引理 7.1.1, $S(p,\rho)$ 上的任一点都是极点, 其中 $\rho=d(p,q)$. 因此只需证明任何满足 $0<d(p,x)<d(p,q)$ 的点 x 都是极点. 取定这样的点 x, 设单位切向量 v 使得测地线 $\gamma_v(t):=\exp tv, t\in[0,\infty)$ 是射线, 记所有这样的 v 的集合为 A_x. 我们来证明 A_x 在 S_xM 中是开的. 任取 $v\in A_x$, 由于 γ_v 与 $S(p,\rho)$ 交于 $S(p,\rho)$ 上的极点 y 处, 故 γ_{-v} 是从 y 出发的且通过 x 的射线的子射线. 注意到 $S(p,\rho)$ 上的每一个点都是极点, 因此存在 S_xM 的包含 $-v$ 的开弧段 I, 使得对任意的 $w\in I$, γ_w 与 $S(p,\rho)$ 相交. 这说明对任一满足 $-w\in I$ 的 w, γ_w 是从 $S(p,\rho)$ 上的点出发的某条射线的子射线. 因此 A_x 在 S_xM 中是开的. 由于 A_x 是非空闭集, 由 $S(p,\rho)$ 的连通性可知 $A_x=S_xM$. 证毕.

定义 7.2.2 对于以 p 为顶点的旋转曲面 M, 定义

$$r(M):=\sup\{d(p,q);q\ \text{为极点}\ \}.$$

定理 7.2.1 设 M 为以 p 为顶点的旋转曲面, 则 M 的极点集合是以 p 为中心、半径为 $r(M)$ 的闭球. 进而, $r(M)$ 非零当且仅当 M 满足

$$\int_1^\infty \frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t<\infty \tag{7.2.51}$$

和

$$\liminf_{t\to\infty} L(t)>0, \tag{7.2.52}$$

其中 $L(t)$ 表示 $S(p,t)$ 的长度.

证明 由引理 7.2.3 容易得到第一部分结论. 若 $r(M)$ 非零, 则由引理 7.1.8 和 7.1.9 可得 (7.2.51) 和 (7.2.52). 假设 (7.2.51) 和 (7.2.52) 成立. 我们来证明若点 q 充分接近 p, 则对任何从 q 出发的测地线, 不存在点 q 沿该测地线的共轭点. 注意到任一测地线等于 $\beta_v, |v|\leqslant m(\rho)$, 或等于 $\gamma_v, |v|<m(\rho)$. 若 $0<d(p,q)<a_1$, 则对每个 $|v|\in(-m(\rho),m(\rho))$,

$$\frac{\partial}{\partial t}r(\beta_v(t))$$

在 $[0,\infty)$ 上非零. 因此由命题 7.2.1 可知不存在点 q 沿 β_v 的共轭点. 若 $v=\pm m(\rho)$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}r(\beta_v(t))$$

在 $t=0$ 处为 0, 但在 $(0,\infty)$ 上为正. 任取正数 t_1. 若对从 $\beta_v(t_1)$ 出发的 $\beta_v\mid_{[0,t_1]}$ 的反向测地线应用推论 7.2.1, 则 q 不与 $\beta_v(t_1)$ 沿 β_v 共轭. 因为 t_1 是任意的, 故对 $v=\pm m(\rho)$ 的情形不存在点 q 沿 β_v 的共轭点. 由推论 7.2.1, 7.2.2, 命题 7.2.5 和引理 7.2.2 可知, 若 $d(p,q)$ 充分小, 则对每个 $v\in[0,m(\rho))$, 不存在点 q 沿 γ_v 的共轭点. 因此, 由引理 7.1.1, 若 $d(p,q)$ 充分小, 则对每个 $v\in(-m(\rho),m(\rho))$, 不存在点 q 沿 γ_v 的共轭点. 证毕.

推论 7.2.3 设 M 是容许全曲率 $c(M)$ 的旋转曲面. 若 $c(M)<2\pi$, 则 M 的极点集合是以 M 的顶点为中心的闭球, 并且这个闭球不是由单个极点组成的.

证明 由定理 5.2.1 得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t}=2\pi-c(M),$$

因此函数 $L(t)$ 满足条件 (7.2.51) 和 (7.2.52). 由定理 7.2.1 可证得本推论. 证毕.

§3 von Mangoldt 曲面的割迹

定义 7.3.1 旋转曲面 M 称为 von Mangoldt 曲面, 若 $G(x)\leqslant G(y)$, 其中 $G(x)$ 和 $G(y)$ 分别为 M 上的两点 x 和 y 处的 Gauss 曲率, 且 $d(p,x)\geqslant d(p,y)$, 这里的 p 表示 M 的顶点.

引理 7.3.1 设 M 是以 p 为顶点的 von Mangoldt 曲面. 若在从 q 点出发的测地线 τ_q 上没有 q 的共轭点, 则 q 为极点.

注 7.3.1 以上引理是 von Mangoldt 在 [59] 中证明的 M 为双叶旋转双曲面的情形.

证明 假设 q 不是极点. 取 q 的割迹的一个端点 x, 由于割点 x 容许唯一的扇形, 故 q 和 x 沿任一连接 q 与 x 的极小测地线共轭. 设 $\tau:[0,d(q,x)]\to M$ 为连接 q 和 x 的极小测地线. 因为 p 为极点, 故在 $[0,d(q,x)]$ 上有

$$d(p,\tau_q(t))=\mid d(p,q)-d(q,\tau(t))\mid.$$

于是由三角不等式得, 在 $[0,d(q,x)]$ 上,

$$d(p,\tau_q(t))\leqslant d(p,\tau(t)).$$

这个不等式表明在 $[0,d(q,x)]$ 上,

$$G(\tau_q(t))\geqslant G(\tau(t)),$$

这是因为 M 为 von Mangoldt 曲面, 由 Sturm 比较定理 (引理 4.2.4), 存在 q 沿 τ_q 的共轭点, 这与 τ_q 的假设矛盾. 证毕.

引理 7.3.2 设 M 为以 p 为顶点的旋转曲面, q 为异于 p 的任一点. 记 (r,θ) 为 p 处的测地极坐标, 使得 $\theta(q)=0$. 若两点 q_1,q_2 满足

$$r(q_1)=r(q_2),\quad 0\leqslant\theta(q_1)<\theta(q_2)\leqslant\pi,$$

则

$$d(q,q_1)<d(q,q_2).$$

证明 可假设

$$0<\theta(q_1)<\theta(q_2)<\pi,\tag{7.3.1}$$

因为剩余情形可转化为这一情形. 设 $c:[0,d(q,q_2)]\to M$ 是连接 q 和 q_2 的极小测地线. 由假设 (7.3.1), c 与 μ_{q_1} 相交于唯一一点 x, 则

$$d(q,x)+d(x,q_2)=d(q,q_2).\tag{7.3.2}$$

由假设 $r(q_1)=r(q_2)$ 和三角不等式得

$$d(x,q_1)<d(x,q_2).\tag{7.3.3}$$

于是由三角不等式可得

$$d(q,q_1)\leqslant d(q,x)+d(x,q_1)<d(q,x)+d(x,q_2)=d(q,q_2).$$

证毕.

定理 7.3.1 若 M 是顶点为 p 的 von Mangoldt 曲面, 则对任意的点 $q\in M\setminus\{p\}$, q 的割迹 C_q 等于 $\tau_q[t_0,\infty)$, 其中 $\tau_q(t_0)$ 表示 q 沿 τ_q 的第一个共轭点.

证明 首先, 可以证明 $C_q\subset\tau_q(d(p,q),\infty)$. 假设存在 q 的割点 q_1, 使得 $q_1\notin\tau_q(d(p,q),\infty)$, 我们将得到矛盾. 若记 p 为极点, 则存在 C_q 的端点 q_1, 使得 $q_1\notin\tau_q[d(p,q),\infty)\bigcup\mu_q[0,\infty)$(见图 7.3.1). 因为 q_1 容许唯一的扇形 $\Sigma_\varepsilon(q_1)$, 故它沿任一连接 q 和 q_1 的极小测地线与 q 共轭. 由于任意连接 q 和 q_1 的极小测地线不与子午线 μ_{q_1} 在内部相交, 故 $\Sigma_\varepsilon(q_1)$ 在 q_1 处的内角也大于 π.

设 $c:[0,1]\to C_q$ 为从 $q_1=c(0)$ 出发的 Jordan 弧, 且对任意的 $t\in(0,1)$, 设 $\Sigma_\varepsilon^+(c(t))$ 为 $c(t)$ 处包含 $c(t,1]$ 的唯一扇形. 因为 $\Sigma_\varepsilon(q_1)$ 在 q_1 处的内角也大于 π, 对任意充分小的正数 t, $\Sigma_\varepsilon^+(c(t))$ 在 $c(t)$ 处的内角也大于 π. 因此对某个正数 t_1, 函数 $[0,1]\ni t\mapsto d(q,c(t))$ 在 $[0,t_1]$ 上严格单调递增. 所以存在连接 q 和 $c(t_1)$ 的单位速度测地线 $\beta:[0,d(q,c(t_1))]\to M$, 使得由 $\dot\tau_q(0)$ 和 $\dot\beta(0)$ 确定的角小于 $\dot\tau_q(0)$ 和 $\dot\alpha(0)$ 的夹角, 其中 $\alpha:[0,d(q,q_1)]\to M$ 表示连接 q 和 q_1 的极小单位速

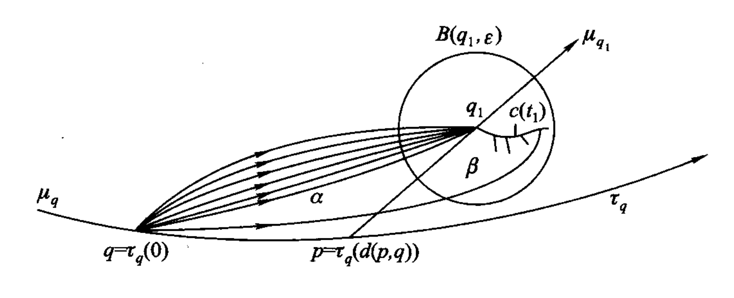


图 7.3.1

度测地线. 由第一变分公式知 β 长于 α, 并且对任意的 $s\in(0,L(\alpha))$, 其中 $L(\alpha)$ 表示 α 的长度, 存在 β 唯一的参数值 $t(s)$, 使得

$$\theta(\alpha(s))=\theta(\beta(t(s))).$$

函数 $\theta\circ\alpha$ 和 $\theta\circ\beta$ 都是严格单调递增的, 这里选取的测地极坐标 (r,θ) 满足 $\theta(q)=0<\theta(q_1)<\pi$. 取定 $s\in(0,L(\alpha))$, 设 (a,b) 为集合 $\{t\in(0,L(\beta));d(p,\beta(t))<d(p,\alpha(s))\}$ 包含 $t(s)$ 的连通分支. 若 $a=0$ (或 $b\geqslant L(\alpha)$), 则 $s>a$(或 $s<b$). 于是为证明 $s>a$(或 $s<b$), 可以假设 $a>0$ (或 $b<L(\alpha)$). 由 (a,b) 的定义知

$$d(p,\alpha(s))=d(p,\beta(a))=d(p,\beta(b)).$$

因为 $0<\theta(\beta(a))<\theta(\alpha(s))=\theta(\beta(t(s)))<\theta(\beta(b))<\pi$, 故由引理 7.3.2 得

$$a=d(q,\beta(a))<s=d(q,\alpha(s))<d(q,\beta(b))=b,$$

这表明对任意的 $s\in(0,L(\alpha))$, $d(p,\beta(s))<d(p,\alpha(s))$. 因为 M 为 von Mangoldt 曲面, 故对任意的 $s\in[0,L(\alpha)]$,

$$G(\alpha(s))\leqslant G(\beta(s)).$$

由以上知 q 沿 α 与 q_1 共轭. 于是由 Sturm 比较定理, 对某个 $s_1\in(0,L(\alpha)]\subset(0,L(\beta))$, q 沿 β 与 $\beta(s_1)$ 共轭, 矛盾. 因此 C_q 包含于 $\tau_q(d(p,q),\infty)$ 中. 若 C_q 非空, 则由引理 7.3.1 知, 沿 τ_q 的 q 的第一个共轭点为 $\tau_q(t_0)$. 对任意 $t>t_0$, $\tau_q|_{[0,t]}$ 不是极小测地线. 因此存在至少两条连接 q 和 $\tau_q(t)$ 的极小测地线, 且它们都区别于 τ_q. 于是对任意的 $t>t_0$, $\tau_q(t)$ 为 q 的割点. 因此可以证明若 C_q 非空, 则

$$\tau_q[t_0,\infty)\subset C_q.$$

假设 $\tau_q|_{[0,t_0]}$ 不是极小的, 则存在 q 的割点 $\tau_q(t_1),0<t_1<t_0$, 使得 $\tau_q|_{[0,t_1]}$ 是极小的. 因为 $\tau_q(t_1)$ 不是 q 点沿 τ_q 的共轭点, 故存在连接 q 和 $\tau_q(t_1)$ 的区别于

τ_q 的极小测地线 γ. 则两条极小测地线 $\tau_q|_{[0,t_1]}$ 和 $\gamma|_{[0,t_1]}$ 围成了相对紧区域 D. 任取从 q 出发的测地线 $c:[0,\infty)\longrightarrow M$, 使得对充分小的正数 t, $c|_{[0,t]}$ 在 D 中. 若除在 q 点之外, 测地线 c 不与 γ 或 τ_q 相交, 则这条测地线为射线. 注意到 $C_q\subset\tau_q(d(p,q),\infty)$. 这是一个矛盾, 因为 c 的像有界. 因此 c 与 γ 或 τ_q 仍有其他交点. 因为 $\gamma|_{[0,t_1]}$ 和 $\tau_q|_{[0,t_1]}$ 是极小的, 故 c 在 $\gamma(t_1)=\tau_q(t_1)$ 处与它们相交. 这表明 $\tau_q(t_1)$ 沿 τ_q 与 q 点共轭. 矛盾. 因此便证明了 $C_q=\tau_q[t_0,\infty)$. 证毕.

命题 7.3.1 设 q 为 von Mangoldt 曲面 M 上一点, 假设存在从 q 出发的两条不同的单位速度极小测地线 α 和 β 相交于 $\tau_q(s_0)$, 其中 s_0 为某个正数. 若由 α 和 β 围成的相对紧致区域 D 不包含 M 的顶点, 则 M 的 Gauss 曲率 G 在集合 $\{x\in M; r_1\leqslant d(p,x)\leqslant r_2\}$ 上为常数. 其中

$$r_1:=\min\{d(p,\alpha(t)),d(p,\beta(t));0\leqslant t\leqslant L(\alpha)=L(\beta)\},$$
$$r_2:=\max\{d(p,\alpha(t)),d(p,\beta(t));0\leqslant t\leqslant L(\alpha)=L(\beta)\}.$$

证明 不失一般性, 我们假设对每个 $t\in(0,L(\alpha))$, 子午线 $\mu_{\alpha(t)}$ 的子弧段 $\mu_{\alpha(t)}|_{[0,d(p,\alpha(t))]}$ 与 β 相交. 则由定理 7.3.1 的证明可知, 在 $[0,L(\alpha)]$ 上有不等式

$$d(p,\beta(t))\leqslant d(p,\alpha(t)),\qquad G(\alpha(t))\leqslant G(\beta(t)).$$

进而, 由定理 7.3.1 知区域 D 中不存在 q 的割点. 因此 q 分别沿 α 和 β 与 $\tau_q(s_0)$ 共轭. 由 Sturm 比较定理, 对任意 $t\in[0,L(\alpha)]$,

$$G(\alpha(t))=G(\beta(t)).$$

因为 M 是 von Mangoldt 曲面, 故对每个 $t\in(0,L(\alpha))$, M 的 Gauss 曲率在集合

$$A(t):=\{x\in M; d(p,\beta(t))\leqslant d(p,x)\leqslant d(p,\alpha(t))\}$$

上为常数. 因为若 $|t_1-t_2|$ 充分小, 则 $A(t_1)$ 与 $A(t_2)$ 具有公共点, 故 G 在集合 $\{x\in M; r_1\leqslant d(p,x)\leqslant r_2\}$ 上为常数. 证毕.

定义 7.3.2 对每个可延拓为 0 点附近的光滑偶函数的光滑函数 $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, 记 $M(f)$ 表示 3 维欧氏空间 E^3 中由 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 定义的旋转曲面.

注意到曲面 $M(f)$ 在点 $(x,y,f(\sqrt{x^2+y^2})), x>0$ 处的 Gauss 曲率为

$$\frac{f'f''}{x(1+f'(x)^2)^2},$$

且在顶点处为 $f''(0)^2$.

注 7.3.2 由引理 7.1.3 可知 $M(f)$ 为光滑黎曼流形. 若 $M(f)$ 同时是 von Mangoldt 曲面, 则称之为椭率曲面. Elerath 在 [22] 中证明了定理 7.3.1 对椭率曲面的情形是成立的.

例 7.3.1 设函数 f_1 定义为

$$f_1(x) := a\sqrt{x^2+b},$$

其中 a, b 为正常数. 则曲面 $M(f_1)$ 为双叶旋转双曲面, 进而为 von Mangoldt 曲面, 因为 $(x, y, f_1(\sqrt{x^2+y^2}))$ 处的 Gauss 曲率为

$$\frac{a^2 b}{((1+a^2)x^2+b)^2}.$$

记 $x = x_1(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为函数

$$t = \int_0^x \sqrt{1+f_1'(x)^2}\mathrm{d}x$$

的反函数, 则

$$x_1'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+f_1'(x(t))^2}}. \tag{7.3.4}$$

若记 $L(t)$ 为 $M(f_1)$ 上半径为 t 的平行线的长度, 则

$$L(t) = 2\pi x_1(t). \tag{7.3.5}$$

由 l'Hôpital 定理和 (7.3.4) 可知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t} = 2\pi\lim_{t\to\infty}x_1'(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}. \tag{7.3.6}$$

因此由定理 7.2.1, $M(f_1)$ 上的极点构成以 $M(f_1)$ 的顶点为中心的非平凡闭球.

例 7.3.2 设光滑函数 f_2 定义为 $f_2(x) = ax^2$, 其中 a 为正常数. 则 $M(f_2)$ 为旋转抛物面且为 von Mangoldt 曲面. 记 $x = x_2(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为函数

$$t = \int_0^x \sqrt{1+f_2'(x)^2}\mathrm{d}x$$

的反函数. 若记 $L(t)$ 为 $M(f_2)$ 上半径为 t 的平行线的长度, 则

$$\int_1^\infty \frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_1^\infty \frac{1}{x_2(t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{x_2(1)}^\infty \frac{1}{x^2}\sqrt{1+f_2'(x)^2}\mathrm{d}x. \tag{7.3.7}$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t \geqslant \frac{a}{2\pi^2}\int_{x_2(1)}^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \infty. \tag{7.3.8}$$

由定理 7.2.1, 这个不等式表明 $M(f_2)$ 上的顶点是唯一的极点.

例 7.3.3 设 $\phi:[0,\infty)\longrightarrow[0,1]$ 为光滑单调不减函数, 满足在 $[0,2]$ 上 $\phi\equiv 0$, 且在 $[4,\infty)$ 上 $\phi\equiv 1$. 函数 $f_3:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$f_3''(x)=2(1-\phi(x))+\frac{\phi(x)}{x},$$

其中在 $x=0$ 处 $f_3=f_3'=0$. 为了验证曲面 $M(f_3)$ 是 von Mangoldt 曲面, 我们引入函数

$$k(t)=\frac{t}{(1+t^2)^2}.$$

由于函数 k 在 $[1/\sqrt{3},\infty)$ 上单调递减, 故函数 $k(f_3'(x))$ 在 $[1/2\sqrt{3},\infty)$ 上单调不增. 因此在这个区间上函数

$$\frac{f_3'f_3''}{x(1+f_3'^2)^2}=\frac{f_3''k(f_3'(x))}{x}$$

也单调不增. 由于在 $[0,2]$ 上 $f_3(x)=x^2$, 故

$$\frac{f_3'f_3''}{x(1+f_3'^2)^2}=\frac{4}{1+4x^2}$$

在 $[0,2]$ 上单调递减. 因此 $M(f_3)$ 是 von Mangoldt 曲面. 容易验证条件 (7.2.51) 和 (7.2.52) 成立, 且对曲面 $M(f_3)$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t}=0.$$

因此曲面 $M(f_3)$ 的全曲率为 2π, 且曲面的极点构成一个非平凡闭球.

在 [56] 中, Maeda 给出了非负曲率黎曼流形 M 上极点集合的直径的上界: 设 p 为 M 上的点, 对每个正数 t, 记 $D(t)$ 为 $S_p(t)$ 的直径. Maeda 与 Sugahara 在 [100] 中证明了:

定理 7.3.2 设 M 为具有非负截曲率的完备连通黎曼流形, 则

$$d_0(M):=\limsup_{t\to\infty}\frac{D(t)^2}{t}$$

不依赖于点 p 的选取, 且 M 的极点集合的直径不大于 $d_0(M)/8$.

作为这个定理的注释, 以下的引理说明, 若 $d_0(M)$ 有限, 则具有非负 Gauss 曲率的旋转曲面 M 的顶点是唯一的极点.

引理 7.3.3 设 p 为旋转曲面 (M,g) 的顶点. 若 M 的 Gauss 曲率非负, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}D(t)/L(t)$ 为正的.

证明 对于 Gauss 曲率等于 0 的情形, 结论是平凡的, 因此我们略去这一情形. 设单位速度测地线 $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow M$ 满足 $\gamma(0)=p$, 则由引理 7.3.2, 在 $[0,\infty)$ 上有

$$D(t)=d(\gamma(t),\gamma(-t)).$$

因为 $D(t)$ 为 Lipschitz 连续, 故其微分几乎处处存在, 且对任意的正数 t 有

$$D(t)=\int_0^t D'(t)\mathrm{d}t. \tag{7.3.9}$$

由 (2.2.5), 若 $D(t)$ 在 $t>0$ 处可微, 则在每个由 γ 割开的闭半平面内, 存在唯一的连接 $\gamma(t)$ 和 $\gamma(-t)$ 的极小测地线 α_t, 且

$$D'(t)=\cos\theta(t)+\cos\theta(-t), \tag{7.3.10}$$

其中 $\theta(t)$ 和 $\theta(-t)$ 分别是由 α_t 和 $\gamma\,|_{[-t,t]}$ 围成的区域在 $\gamma(t)$ 和 $\gamma(-t)$ 处的内角. 由 M 的对称性可知 $\theta(t)=\theta(-t)$. 由于 M 的 Gauss 曲率不为 0, 故 γ 不是直线. 因此对充分大的 t, 测地线 α_t 和它关于 γ 的镜射得到的曲线围成紧致区域 $\Delta(t)$. 由 Gauss-Bonnet 定理和定理 2.2.1 得

$$c(\Delta(t))=4\theta(t),\qquad c(M)\leqslant 2\pi. \tag{7.3.11}$$

由于 M 的 Gauss 曲率非负, 故由 (7.3.11), $\theta(t)\leqslant\pi/2$ 对几乎所有的 t 成立. 因此由 (7.3.9) 和 (7.3.10) 可知 $D(t)$ 单调不减. 设 $B(t)$ 是以 p 为中心、半径为 t 的开球. 由于 $L(t)=2\pi m(t)$, 所以对任意 $t>0$,

$$L'(t)=2\pi-c(B(t)).$$

由于 M 的 Gauss 曲率非负, 因此 $L(t)$ 也单调不减. 若 $L(t)$ 有界, 则显然

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{L(t)}$$

为正. 由 Gauss-Bonnet 定理, 对几乎所有充分大的 t 有

$$D'(t)=2\cos\frac{c(\Delta(t))}{4}\geqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c(B(t))}{4}\right). \tag{7.3.12}$$

由 l'Hôpital 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t}&=\lim_{t\to\infty}L'(t)=2\pi-c(M),\\ \lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}&=\lim_{t\to\infty}D'(t)=2\cos\frac{c(M)}{4}.\end{aligned} \tag{7.3.13}$$

因此, 若全曲率 $c(M)<2\pi$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{L(t)}=\frac{2\cos\frac{1}{4}c(M)}{2\pi-c(M)}. \tag{7.3.14}$$

一方面, 若 $c(M)=2\pi$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}L(t)=\infty$, 则由引理 5.2.1 得

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{D(t)}{L(t)}\geqslant\liminf_{t\to\infty}\frac{D'(t)}{L'(t)}\geqslant\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{2t}=\frac{1}{2}. \tag{7.3.15}$$

另一方面, 由于对任意 $t>0$, $2D(t)\leqslant L(t)$, 故

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{D(t)}{L(t)}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{7.3.16}$$

由 (7.3.15) 和 (7.3.16) 可得 $\lim\limits_{t\to\infty}D(t)/L(t)=1/2$. 证毕.

对于 von Mangoldt 曲面 M, 我们来计算 $r(M)$ (见定义 7.2.2).

定理 7.3.3 设 von Mangoldt 曲面 M 满足

$$\int_1^\infty\frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t<\infty.$$

若由

$$c(L):=4\int_0^\infty\frac{L(t)-tL'(t)}{L^3(t)}\mathrm{d}t \tag{7.3.17}$$

定义的有界数 $c(L)$ 是非正的, 则 $r(M)=\infty$. 若 $c(L)$ 为正, 则 $r(M)$ 是函数 $F:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 的唯一零点, 其中

$$F(r):=c(L)-\int_r^\infty\frac{1}{L^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{7.3.18}$$

证明 设 q 为 M 上异于顶点的一个点, 由 (7.2.30) 可知在 (ρ,∞) 上, 沿 τ_q 的 Jacobi 场 Y_0 为

$$\begin{aligned}Y_0(t)=\Bigg(&-\frac{2}{m(a_1)}+2m(a_1)h(m(a_1))-2\int_0^{m(a_1)}th'(t)\mathrm{d}t\\&+2\int_{a_1}^\infty\frac{1}{m^2(r)}\mathrm{d}r-\int_\rho^\infty\frac{1}{m^2(r)}\mathrm{d}r\\&-\int_{t-\rho}^\infty\frac{1}{m^2(r)}\mathrm{d}r\Bigg)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\tau_q(t)}\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

由于 $Y_0(t)$ 不依赖于 a_1 的选取, 故

$$C:=-\frac{2}{m(s)}+2m(s)h(m(s))-2\int_0^{m(s)}th'(t)\mathrm{d}t+2\int_s^\infty\frac{1}{m^2(r)}\mathrm{d}r \tag{7.3.20}$$

在 $(0,a_1]$ 上为常数. 由分部积分, 对任意的正数 t, 有

$$4\int_t^\infty \frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r = 2\int_t^\infty \frac{1}{m^2}\mathrm{d}r - \frac{2t}{m^2(t)}. \tag{7.3.21}$$

因而对任意的 $s\in(0,a_1]$,

$$\begin{aligned} C = {} & 4\int_s^\infty \frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r + \frac{2s}{m^2(s)} - \frac{2}{m(s)} \\ & +2m(s)h(m(s)) - 2\int_0^{m(s)} th'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由 l'Hôpital 定理和推论 7.1.1 可知

$$\lim_{s\to+0}\left(\frac{s}{m^2(s)} - \frac{1}{m(s)}\right) = \lim_{s\to+0}\frac{s-m(s)}{m^2(s)} = 0.$$

由于 C 不依赖于 s, 故有

$$C = \lim_{s\to+0} C = 4\int_0^\infty \frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r = (2\pi)^2 c(L). \tag{7.3.22}$$

由 (7.3.19) 和 (7.3.22) 可知, 对任意的 $t>\rho$,

$$Y_0(t) = (2\pi)^2\left\{F(\rho) - \int_{t-\rho}^\infty \frac{1}{L(r)^2}\mathrm{d}r\right\}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\tau_q(t)}. \tag{7.3.23}$$

若 $c(L)$ 非正, 则任给 $t>\rho$, $Y_0(t)$ 非零. 这表明不存在点 q 沿 τ_q 的共轭点. 于是由引理 7.3.1 知 q 为极点. 因为 q 是任意的, 故 $r(M)=\infty$. 假设 $c(L)$ 为正, s_0 为函数 F 的唯一零点. 于是若 ρ 大于 (或小于) s_0, 则在 (ρ,∞) 中 $Y_0(t)$ 具有零点 (或没有零点). 因而由引理 7.3.1 知 $r(M)$ 为 F 的零点. 证毕.

作为定理 7.3.3 的应用, 我们来构造在顶点附近具有正的常值 Gauss 曲率的 von Mangoldt 曲面, 但它的每个点都是极点. 即, 我们来构造截曲率变号但没有共轭点的黎曼流形. R. Gulliver 首先在 [33] 中构造了这样的流形. 设光滑函数 $m_0:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ 定义为

$$m_0(r) = (1-\phi(r))\sin r + \phi(r)(r-c+\tan 2c), \tag{7.3.24}$$

其中正常数 $c<\pi/4$, 且光滑不减函数 $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足对 $r\leqslant c$, $\phi(r)=0$; 且对 $r\geqslant 2c$, $\phi(r)=1$.

引理 7.3.4　积分

$$\int_0^\infty \frac{m_0(r)-rm_0'(r)}{m_0^3(r)}\mathrm{d}r$$

为负.

证明 取定正常数 $\epsilon(< c)$. 由分部积分得

$$\int_\epsilon^\infty \frac{m_0(r) - rm_0'(r)}{m_0^3(r)}\mathrm{d}r = \int_\epsilon^\infty \frac{1}{m_0^2}\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int_\epsilon^\infty r\left(\frac{1}{m_0^2}\right)'\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{2}\int_\epsilon^\infty \frac{1}{m_0^2}\mathrm{d}r - \frac{\epsilon}{2\sin^2\epsilon}. \tag{7.3.25}$$

因为在 $[c, 2c]$ 上 $m_0(r) \geqslant \sin r$, 故

$$\int_\epsilon^\infty \frac{1}{m_0^2}\mathrm{d}r \leqslant \int_\epsilon^{2c} \frac{1}{\sin^2 r}\mathrm{d}r + \int_{2c}^\infty \frac{\mathrm{d}r}{(r - c + \tan 2c)^2}$$
$$= -\cot 2c + \cot\epsilon + \frac{1}{c + \tan 2c}. \tag{7.3.26}$$

由 l'Hôpital 定理,

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(\cot\epsilon - \frac{\epsilon}{\sin^2\epsilon}\right) = \lim_{\epsilon\to+0}\frac{\sin\epsilon\cos\epsilon - \epsilon}{\sin^2\epsilon} = 0.$$

由 (7.3.25) 和 (7.3.26) 可得

$$\int_0^\infty \frac{m_0(r) - rm_0'(r)}{m_0^3(r)}\mathrm{d}r \leqslant -\frac{\cot 2c}{2} + \frac{1}{2(c + \tan 2c)} < 0. \tag{7.3.27}$$

证毕.

由 (7.2.22) 式, 显然在 $(0, c)$ 上 $-m_0''/m_0 \equiv 1$, 且在 $(2c, \infty)$ 上 $-m_0''/m_0 \equiv 0$. 因此存在光滑不增函数 $K : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, 满足在 $(0, \infty)$ 上 $K \leqslant -m_0''/m_0$; 在 $[0, c]$ 上 $K \equiv 1$; 在 $[2c, \infty)$ 上 $K \equiv$ 常数. 若 m 为微分方程

$$m'' + Km = 0$$

满足初始条件 $m(0) = 0, m'(0) = 1$ 的解, 则由 Sturm 比较定理, 对任意非负数 r, $m(r) \geqslant m_0(r)$. 若记 (r_0, θ_0) 为欧氏平面 $(\mathbb{R}^2, g_0)$ 原点处的测地极坐标, 则由推论 7.1.1 和定理 7.1.1 知, $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}r_0^2 + m(r_0)^2\mathrm{d}\theta_0^2)$ 是以原点为顶点的 von Mangoldt 曲面, 且它的 Gauss 曲率可用函数 K 表示.

定理 7.3.4 以上构造的 von Mangoldt 曲面在其顶点处具有正的常值 Gauss 曲率 (并在某个紧致子集之外具有负的常值 Gauss 曲率), 但没有共轭点.

证明 因为在 $[0, \infty)$ 上 $m(r) \geqslant m_0(r)$, 故由 (7.3.25) 得

$$\int_0^\infty \frac{m - rm'}{m^3}\mathrm{d}r \leqslant \int_0^\infty \frac{m_0 - rm_0'}{m_0^3}\mathrm{d}r.$$

因此, 由定理 7.3.3 和引理 7.3.4, 曲面 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}r_0^2 + m(r_0)^2\mathrm{d}\theta_0^2)$ 上的每个点都是极点. 特别地, 它没有共轭点. 由于 Gauss 曲率等于函数 K, 则由 K 的性质可知以上关于 Gauss 曲率的论断是显然的. 证毕.

现在我们来证明以下两个解析不等式 (7.3.28) 和 (7.3.29).

命题 7.3.2 设光滑函数 $f:(0,\pi/2]\longrightarrow(0,\infty)$ 可延拓为 0 附近的光滑奇函数, $f'(0)=1$. 假设函数 f''/f 在 $(0,\pi/2]$ 上单调不减, 且 $\pi/2$ 是函数 f' 最小的正值零点, 则以下不等式成立:

$$f(\pi/2)\leqslant 1, \tag{7.3.28}$$

$$4\int_0^{\pi/2}\frac{f(t)-tf'(t)}{f^3(t)}\mathrm{d}t\geqslant\frac{\pi}{f^2(\pi/2)}, \tag{7.3.29}$$

并且每个式子等号成立当且仅当 $f(t)=\sin t$.

证明 将函数 f 延拓为 $(0,\infty)$ 上的光滑正值函数 F. 设 $G:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 为光滑单调不增函数, 满足在 $(0,\infty)$ 上 $G\leqslant -F''/F$, 且在 $(0,\pi/2]$ 上 $G\equiv -F''/F$. 设 m 是微分方程 $m''+Gm=0$ 满足初始条件 $m(0)=0, m'(0)=1$ 的解. 则由 Sturm 比较定理, 在 $(0,\infty)$ 上 $m\geqslant F>0$. 由推论 7.1.1 和定理 7.1.1 得到 von Mangoldt 曲面 $(M,g):=(\mathbb{R}^2,\mathrm{d}r^2+m^2(r)\mathrm{d}\theta^2)$, 其中 (r,θ) 表示欧氏平面 $(\mathbb{R}^2,g_0)$ 原点附近的测地极坐标. 由引理 7.1.4 可知平行线 $S_p(\pi/2)$ 是测地线, 其中 p 为 M 的顶点. 设 q 为 $S_p(\pi/2)$ 上任一点, 由定理 7.3.1, 从 q 出发的 $S_p(\pi/2)$ 的半圆是极小的. 因此半圆的长度不大于测地线段 $\tau_q|_{[0,\pi]}$ 的长度. 因为半圆长度为 $\pi m(\pi/2)$, 故可得 (7.2.35) 式. 由 (7.2.30) 式, 在 $(\pi/2,\infty)$ 上沿 τ_q 的 Jacobi 场 $Y_0(t)$ 为

$$\begin{aligned}Y_0(t)=&\left(-\frac{2}{m(a_1)}+2m(a_1)h(m(a_1))-2\int_0^{m(a_1)}th'(t)\mathrm{d}t\right.\\&\left.+2\int_{a_1}^{\pi/2}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r+\int_{\pi/2}^{t-\pi/2}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\tau_q(t)}.\end{aligned} \tag{7.3.30}$$

由于 $Y_0(t)$ 不依赖于 a_1, 故

$$C:=-\frac{2}{m(s)}+2m(s)h(m(s))-2\int_0^{m(s)}th'(t)\mathrm{d}t+2\int_s^{\pi/2}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r \tag{7.3.31}$$

在 $(0,a_1]$ 上为常数. 由分部积分可得

$$4\int_s^{\pi/2}\frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r=2\int_s^{\pi/2}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r+\frac{\pi}{m^2(\pi/2)}-\frac{2s}{m^2(s)}. \tag{7.3.32}$$

因此由 (7.3.31), 对任意的 $s\in(0,a_1]$ 有

$$\begin{aligned}C=&-\frac{2}{m(s)}+2m(s)h(m(s))-2\int_0^{m(s)}th'(t)\mathrm{d}t+\frac{2s}{m^2(s)}\\&-\frac{\pi}{m^2(\pi/2)}+4\int_s^{\pi/2}\frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{7.3.33}$$

由 l'Hôpital 定理和推论 7.1.1 可知

$$\lim_{s\to+0}\left(\frac{s}{m^2(s)}-\frac{1}{m(s)}\right)=0.$$

因此由 (7.3.33) 式可得

$$C=\lim_{s\to+0}C=4\int_0^{\pi/2}\frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r-\frac{\pi}{m^2(\pi/2)}. \tag{7.3.34}$$

由 (7.3.30) 式, 对任意的 $t\in(\pi/2,\infty)$,

$$Y_0(t)=\left\{4\int_0^{\pi/2}\frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r-\frac{\pi}{m^2(\pi/2)}+\int_{\pi/2}^{t-\pi/2}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r\right\}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\tau_q(t)}. \tag{7.3.35}$$

因为 $\tau_q(\pi)$ 是 q 的割点, 故由定理 7.3.1, 存在 $t_0\in(\pi/2,\pi]$, 使得 $Y_0(t_0)=0$. 由 (7.3.35),

$$4\int_0^{\pi/2}\frac{m-rm'}{m^3}\mathrm{d}r-\frac{\pi}{m^2(\pi/2)}=\int_{t_0-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{m^2}\mathrm{d}r\geqslant 0.$$

因此可得 (7.3.29) 式. 假设 (7.3.28) 或 (7.3.29) 中的等号成立, 则 $\tau_q\,|_{[0,\pi]}$ 也是极小的. 由命题 7.3.1 知, 在闭球 $\overline{B(p,\pi/2)}$ 上 M 的 Gauss 曲率为常数. 因此由推论 7.1.1 知, 在 $[0,\pi/2]$ 上 $f(t)=m(t)=\sin t$. 反之, 若 $f(t)=\sin t$, 则 M 的 Gauss 曲率在闭球 $\overline{B(p,\pi/2)}$ 上为常数, 因此等号成立. 证毕.

第八章　测地线的性态

本章将讨论容许全曲率的黎曼平面上的测地线的性态, 我们的主要目的是研究完备测地线充分靠近无穷时的整体拓扑形态, 这方面的原始研究出现在文献 [93] 和 [95] 中. 特别地, 我们给出 Whitney 旋转数的一些显式估计, 以及某些情形下以无穷处曲率 (或全曲率) 表示的测地线的自交数, 同时还讨论了这类测地线的存在性.

§1　平面曲线的形态

本节我们介绍一些预备记号, 以便给出本章的主要定理.

设 M 为 2 维无边微分流形.

定义 8.1.1 (横截浸入)　区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的 C^∞ 映射 $\alpha : I \longrightarrow M$ 称为弱横截浸入 (或横截浸入), 若它满足以下的条件 (1) 和 (2) (或 (1), (2) 和 (3))

(1) (浸入条件) 对任意的 $t \in I$, $\dot{\alpha}(t) \neq 0$.

(2) (源横截条件) 对 $a \neq b$, 若 $\alpha(a) = \alpha(b) =: p$, 则 T_pM 中的切向量 $\dot{\alpha}(a)$ 和 $\dot{\alpha}(b)$ 线性无关.

(3) (目标横截要求) 映射 α 没有三重点, 即不存在 $a, b, c \in I$, 使得 $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c)$.

对 α 为黎曼流形中测地线的情形, α 是弱横截的当且仅当它不是闭的.

引理 8.1.1　若 $\alpha : I \to M$ 为恰当弱横截浸入, 则 α 的交叉点集合是 M 中的离散子集. 特别地, 若 I 紧致, 则 α 具有至多有限个二重点.

证明 假设恰当弱横截浸入 $\alpha: I \to M$ 的交叉点集合不是离散的, 则存在交叉点序列 $p_i = \alpha(a_i) = \beta(b_i), i = 1, 2, \cdots$ 收敛于 $p \in M$. 因为 α 为恰当的, 故存在 a_i, b_i 的子列 $a_{j(i)}, b_{j(i)}$ 分别收敛于 $a, b \in I$. 所以 $p = \alpha(a) = \beta(b)$. 对于可微的 $\alpha: I \to M$, 要求 α 可以可微地延拓到包含 I 的开区间上. 由 α 的可微性可知存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\alpha\mid_{(t-a,t+a)}$ 没有自交点, 于是 $a \neq b$. 由 $\alpha(a_{j(i)}) = \beta(b_{j(i)})$ 可知 $\dot{\alpha}(a) = \pm\dot{\beta}(b)$, 这与 α 的源横截条件矛盾. 证毕.

以下假设 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^2$, 且取定 M 的定向.

定义 8.1.2 (旋转数) 设 $\alpha: I \to M$ 为闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 的恰当弱横截浸入, α 的二重点 $p = \alpha(a) = \alpha(b)$ $(a < b)$ 称为具有正号 ($\operatorname{sgn} p := 1$), 若基 $(\dot{\alpha}(a), \dot{\alpha}(b))$ 具有正定向; 否则称为具有负号 ($\operatorname{sgn} p := -1$). 这里, 任一 n 重点 $p = \alpha(a_1) = \cdots = \alpha(a_n)$ 且 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ 可视为由 $\binom{n}{2}$ 个不同的二重点 $\alpha(a_i) = \alpha(a_j) (i \neq j)$ 组成. 当 I 为紧致区间时, α 的旋转数 $\operatorname{rot} \alpha$ 定义为

$$\operatorname{rot} \alpha := \mid n_+ - n_- \mid,$$

其中 n_+ (或 n_-) 为 α 的正 (或负) 二重点的个数. 当 $I = \mathbb{R}$ 时, α 的旋转数定义为

$$\operatorname{rot} \alpha := \limsup_{\substack{s \to -\infty \\ t \to +\infty}} \operatorname{rot} \alpha\mid_{[s,t]} \qquad (\in \{0, 1, \cdots, \infty\}).$$

恰当弱横截浸入 $\alpha: \mathbb{R} \to M$ 的极大子旋转数定义为

$$\max\operatorname{rot} \alpha := \sup\{\operatorname{rot} \hat{\alpha}; \hat{\alpha} \text{ 为 } \alpha \text{ 的子弧段}\}.$$

显然, $\operatorname{rot} \alpha \leqslant \max \operatorname{rot} \alpha$, $\operatorname{rot} \alpha$ 是 α 的紧致支撑正则同伦类不变量. 这里, 称两个恰当横截浸入 $\alpha, \beta: \mathbb{R} \to M$ 为紧致支撑正则同伦的, 若存在 $a < b$, 使得 $\alpha(t) = \beta(t)$ 对任意的 $t \in (-\infty, a] \bigcup [b, +\infty)$ 成立, 且对固定的 $\dot{\alpha}(a)$ 和 $\dot{\beta}(b)$, 在 $\alpha|_{[a,b]}$ 和 $\beta|_{[a,b]}$ 之间存在正则同伦. 然而极大子旋转数不是紧致支撑正则同伦的不变量.

定义 8.1.3 (半正则曲线) 恰当横截浸入 $\alpha: \mathbb{R} \to M$ 称为半正则曲线, 若存在 α 的 (有限或无限的) 二重点序列 $\cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots$, 使得 $\alpha(a_i) = \alpha(b_i), i = 1, 2, \cdots$. 半正则弧定义为某条半正则曲线的子弧段.

为了描述半正则曲线, 我们用微分同胚的观点来对回路和双角进行分类.

M 中的回路是曲线 $\alpha: [a, b] \to M$, 满足 $\alpha(a) = \alpha(b) =: p$, 其中 p 称为回路 α 的基点. 回路 $\alpha: [a, b] \longrightarrow M$ 称为简单的, 若 $\alpha\mid_{[a,b)}$ 没有交叉点. 因为 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^2$, 故任一简单回路 α 围成 M 中的紧致圆盘 $\Delta(\alpha)$. 对于没有黎曼结

构的 M, 无法度量 $\Delta(\alpha)$ 在基点处的内角 θ; 而对 M 上的任一黎曼度量, 可以区别 $\theta < \pi$, $\theta = \pi$ 和 $\theta > \pi$ 的情形 (不依赖于给出的黎曼度量). 若 $\theta < \pi$, 称圆盘区域 $\Delta(\alpha)$ 为泪珠形的; 若 $\theta > \pi$, 称圆盘区域 $\Delta\alpha$ 为番茄形的; 见图 8.1.1.

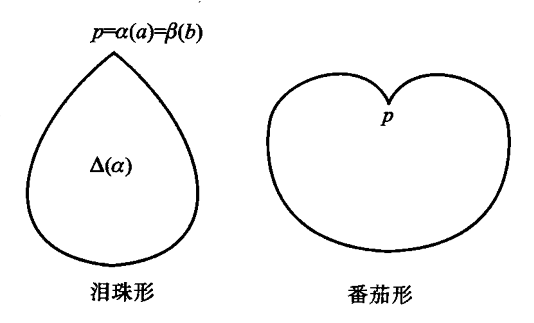


图 8.1.1

M 的双角定义为两条曲线 $\alpha : [a, a'] \longrightarrow M$ 和 $\beta : [b, b'] \longrightarrow M$ 的并, 其中 $\alpha(a) = \beta(b)$, $\alpha(a') = \beta(b')$. 双角 $\alpha \bigcup \beta$ 称为简单的, 若两条曲线 α 和 β 的并是简单的, 这形成一条分段闭曲线. M 中的任一简单双角 $\alpha \bigcup \beta$ 围成 M 中的一个紧致圆盘区域 $\Delta(\alpha \bigcup \beta)$. 当这样的区域 $\Delta(\alpha \bigcup \beta)$ 的两个内角 θ_1 和 θ_2 都不等于 π 时, 以下三种情况之一成立; 见图 8.1.2.

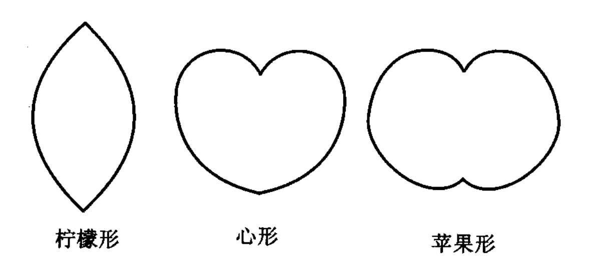


图 8.1.2

(1) $\theta_1, \theta_2 < \pi$, 此时称 $\Delta(\alpha \bigcup \beta)$ 为柠檬形的.

(2) 对某个 $i = 1, 2$, $\theta_i < \pi$ 且 $\theta_{\bar{i}} > \pi$ (其中 $\bar{i}$ 表示 $\{1, 2\}$ 中不同于 i 的数). 此时称 $\Delta(\alpha \bigcup \beta)$ 为心形的.

(3) $\theta_1, \theta_2 > \pi$, 此时称 $\Delta(\alpha \bigcup \beta)$ 为苹果形的.

假设 α 为非简单半正则曲线, 设 $p_i = \alpha(a_i) = \alpha(b_i), i = 1, 2, \cdots$ 为 α 的二重点, 使得 $\cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots$. 子弧 $\alpha|_{[a_1, b_1]}$ 是围成圆盘 B_1 的简单回路. 因为 α 是恰当的, 所以 B_1 必为泪珠形的. 两条子弧的并 $\alpha|_{[a_i, a_{i-1}]} \bigcup \alpha|_{[b_{i-1}, b_i]}$ 是围成圆盘 B_i 的简单双角, 且 B_i 满足以下两组等价条件之一:

(1) $\operatorname{sgn} p_{i-1} \neq \operatorname{sgn} p_i \iff B_i \bigcap \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} B_j = \{p_i\} \iff B_i$ 是柠檬形的.

(2) $\operatorname{sgn} p_{i-1} = \operatorname{sgn} p_i \Longleftrightarrow B_i \bigcup \{p_i\} \supset \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j \Longleftrightarrow B_i$ 是心形的.

定义 8.1.4 (半正则性指标) M 中半正则曲线 α 的半正则性指标 (或简单指标) $\operatorname{ind} \alpha \in \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$ 定义为与 α 相关的非柠檬形的圆盘 B_i 的个数; 见图 8.1.3.

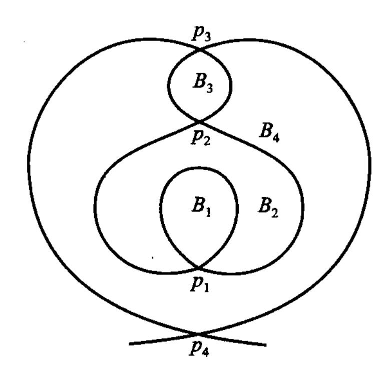


图 8.1.3 指标 3 的半正则曲线

容易证明以下命题.

命题 8.1.1 对半正则曲线 α 有:

(1) $\operatorname{rot} \alpha \leqslant \max \operatorname{rot} \alpha \leqslant \operatorname{ind} \alpha \leqslant \sharp\{p_i\}$.

(2) α 简单当且仅当 $\operatorname{ind} \alpha = 0$.

命题 8.1.2 设 α 为 M 中的半正则曲线, 递归函数 $f : \mathbb{N} \bigcup \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 定义为: $f(0) := 0$. 对 $i \geqslant 1$,

$$f(i) := \begin{cases} 1 + f(i-1), & \text{若 } B_i \text{ 不是柠檬形;} \\ 1 - f(i-1), & \text{其他情形.} \end{cases}$$

对 $i \geqslant \sharp\{p_i\}$,

$$f(i) := f(i-1).$$

则

$$\operatorname{rot} \alpha = \limsup_{i \to \infty} |\ f(i)\ |\ .$$

证明 利用紧致支撑正则同伦消去柠檬形即得. 证毕.

定义 8.1.5 (正则和几乎正则曲线) 半正则曲线 α 称为几乎正则的, 若最大的心形中不包含柠檬形. 半正则曲线 α 称为正则的, 若其中不包含柠檬形.

定义与半正则曲线 α 相关的整数序列 $k(j), j=0,1,\cdots,\text{ind}\ \alpha$ 为:

$$k(0):=0;$$
$$k(1):=1,\ \text{若}\ \alpha\ \text{非简单};$$
$$k(j+1):=\min\{i\in\mathbb{N}; i\geqslant k(j)+1\ \text{且}\ B_i\ \text{为心形}\}.$$

则显然有以下结果:

命题 8.1.3 (1) 若 α 为正则曲线, 则 $\text{rot}\ \alpha=\max\text{rot}\ \alpha=\text{ind}\ \alpha=\sharp\{p_i\}$. 假设半正则曲线 α 具有有限指标, 则有

(2) α 正则当且仅当 $\text{ind}\ \alpha=\sharp\{p_i\}$.

(3) α 几乎正则当且仅当 $\text{ind}\ \alpha=k(\text{ind}\ \alpha)$.

(4) 若 α 几乎正则, 则

$$\text{rot}\ \alpha=\begin{cases}\text{ind}\ \alpha-1, & \text{若}\ \sharp\{p_i\}-\text{ind}\ \alpha\ \text{为奇数};\\ \text{ind}\ \alpha, & \text{若}\ \sharp\{p_i\}-\text{ind}\ \alpha\ \text{为偶数或无穷}.\end{cases}$$

命题 8.1.4 设 K 为 M 中的紧致圆盘区域, 设 α 为 M 中 K 之外的半正则曲线, 使得若 α 非简单, 则 $K\subset\text{int}\ B_1$. 那么 α 到 $N:=\overline{M\setminus K}$ 的万有覆盖空间 $\tilde{N}$ 的任一提升 $\tilde{\alpha}$ 是微分平面 $\tilde{N}\setminus\partial\tilde{N}$ 上的半正则曲线. 进而, 若 α 几乎正则, 则提升 $\tilde{\alpha}$ 是简单的.

练习 8.1.1 证明命题 8.1.3 和 8.1.4.

练习 8.1.2 黎曼流形 M 中的点 p 称为极点, 若指数映射 $\exp_p: T_pM\longrightarrow M$ 为局部微分同胚. 特别地, 若 M 单连通, 这一条件等价于指数映射 $\exp_p: T_pM\longrightarrow M$ 是微分同胚. 证明具有极点的黎曼平面中的半正则完备测地线是正则的.

定义 8.1.6 (反向半正则弧) M 中的反向半正则弧定义为从紧致区间 $I\subset\mathbb{R}$ 到 M 的满足以下条件的横截浸入 α: 存在微分同胚 $\varphi: M\longrightarrow\mathbb{C}$, 使得 $0\notin\varphi\circ\alpha(I)$, 且曲线 $I\ni t\mapsto 1/\varphi\circ\alpha(t)\in\mathbb{C}$ 是一个与包含 $0\in\mathbb{C}$ 的泪珠形相关的半正则弧, 其中 $\mathbb{C}$ 为复平面.

§2 主要定理和例子

本节中我们将给出本章的主要定理, 证明将在下节中给出.

容许全曲率的黎曼平面 M 可以划分为三类: 收缩黎曼平面, 扩张黎曼平面和稳定黎曼平面 (见图 8.2.1 和后面的定义 8.3.1).

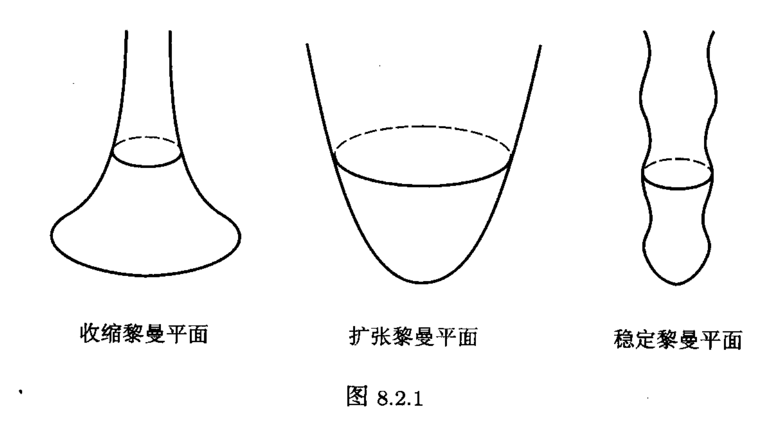


图 8.2.1

例如, 若 $c(M) < 2\pi$, 则 M 为扩张的 (见命题 8.3.2). M 的正 (或负) 曲率轨迹 M^+ (或 M^-) 定义为 M 的具有正 (或负) Gauss 曲率的子集. 对于 $c(M) = 2\pi$ 的情形, 若 M^+ 有界且 M^- 无界, 则 M 是收缩的; 若 M^+ 无界且 M^- 有界, 则 M 是扩张的; 若 M 在一个紧致子集之外是平坦的, 则 M 是稳定的. M 是稳定的当且仅当在充分接近无穷处存在简单闭测地线 (见后面的命题 8.3.1).

定理 8.2.1 若 M 是扩张黎曼平面, 则 M 中任一充分接近无穷处的完备测地线是半正则的.

在 $c(M) < 2\pi$ 的更严格的假设条件下, 我们有完备测地线的 (几乎) 正则性及指标控制. 我们先来看下面简单 (而典型) 的例子.

例 8.2.1 (1) 在平锥 $C := \text{cone}\ S^1(\theta/2\pi), \theta > 0$ 中, 任何 (不经过顶点 o 的) 测地线 γ 是正则的. 设 $\tilde{C}$ 为 $C \setminus \{o\}$ 的万有覆盖空间, $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的提升; 见图 8.2.2. 存在 C 中从顶点处出发的射线 σ, 使得 σ 的提升 $\tilde{\sigma}$ 平行于 $\tilde{\gamma}$. γ 的指标等于 σ 的所有与 γ 相交的提升的个数, 它等于 $n(\theta) := \max\{k \in \mathbb{Z}; k\theta < \pi\}$.

(2) 设黎曼平面 M 中包含紧致子集 K, 使得在 K 之外 Gauss 曲率为 0. 则存在 M 的包含 K 的紧致圆盘区域 K', 使得 $M \setminus K'$ 等距嵌入到 $S^1(\lambda_\infty(M)/2\pi)$ 的锥中. 因此, M 中充分接近无穷处的任一完备测地线 γ 是正则的, 且指标为 $\text{ind}\ \gamma = n(\lambda_\infty(M))$.

在满足 $c(M) < 2\pi$ 的一般黎曼平面 M 中, 充分接近无穷处的所有测地线几乎都具有以上例子中描述的性态. 实际上, 我们有:

定理 8.2.2 设黎曼平面 M 满足 $\lambda_\infty(M) > 0$, 且 $\lambda_\infty(M) = +\infty$ 或 $\pi/\lambda_\infty(M)$ 不是整数. 则充分接近无穷处的任一完备测地线是正则的, 且指标为 $[\pi/\lambda_\infty(M)]$.

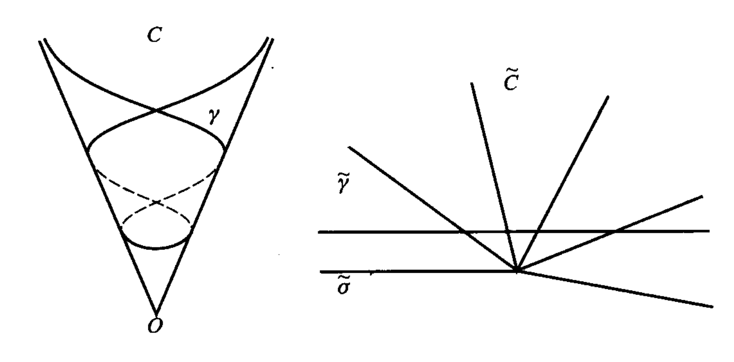


图 8.2.2

特别地, 若 $c(M) < \pi$, 则以上定理表明充分接近无穷处的任一完备测地线是恰当的和简单的.

定理 8.2.3 设黎曼平面 M 满足 $\pi/\lambda_\infty(M)$ 为整数. 对于完备测地线 γ, 考虑以下三个条件:

(i) γ 是正则的, 且

$$\operatorname{ind}\gamma = \pi/\lambda_\infty(M) - 1.$$

(ii) γ 是正则的, 且

$$\operatorname{ind}\gamma = \begin{cases} \pi/\lambda_\infty(M), & \text{若 } c(M) \neq \pi; \\ 0\text{或 } 1, & \text{若 } c(M) = \pi. \end{cases}$$

(iii) γ 非正则但几乎正则 (可能有无穷多个二重点), 且

$$\operatorname{ind}\gamma = \pi/\lambda_\infty(M).$$

则对于充分接近无穷处的完备测地线 γ, 有

(1) 若 M^- 有界, 则所有的 γ 满足条件 (i).

(2) 若 M^- 无界且 M^+ 有界, 则所有的 γ 满足条件 (ii).

(3) 若 M^- 和 M^+ 都无界, 则所有的 γ 满足条件 (i), (ii) 或 (iii).

注 8.2.1 正如例 8.2.2 中所示, 条件 M^- 无界, M^+ 有界和 $c(M) = \pi$ 不能决定 M 中充分接近无穷处的完备测地线 γ 的指标; 指标可能满足 $\operatorname{ind}\gamma = 0$ 或 1. 然而, 若存在 M 的紧致子集, 使得在该子集之外 M 具有负曲率, 则任一这样的测地线 γ 满足 $\operatorname{ind}\gamma = 1$.

例 8.2.2 设 $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是唯一满足 $f(t) := 1/(t - \ln t), t \in (0, +\infty)$ 的连续函数, 记 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \leqslant f(x)\}$; 见图 8.2.3. 曲线 $c := \partial A$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑恰当曲线的像, 它包含 y 轴负半轴, 关于 x 轴正半轴对称, 且

只有一个镜射点 $p_a := (a, f(a)), 1 < a < 2$. 考虑在 $[0, +\infty)$ 上取值的函数, 正数 r_0 给出了 c 的曲率半径的正的下界.

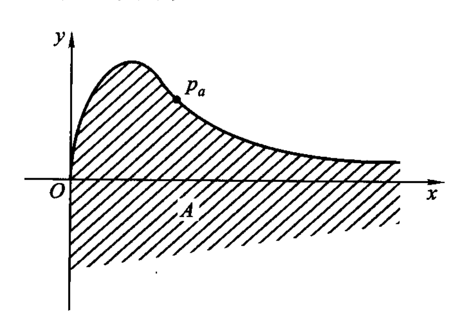


图 8.2.3

对于任意的 $p = (x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$, 记

$$B_p := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |\, z \,| \leqslant 1/2, \\ (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \leqslant (\epsilon \ln 4)^2 g(z)^2\},$$

其中 $0 < \epsilon < r_0$, 且 $g : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ 是唯一满足对任意 $t \in (-1/2, 1/2)$, $g(t) := (\ln(1/4 - t^2))^{-1}$ 的连续函数. B_p 是以 $\{p\} \times \mathbb{R}$ 为轴的光滑旋转球, 北极点为 $(x_p, y_p, 1/2)$, 南极点为 $(x_p, y_p, -1/2)$. $B := \bigcup\limits_{p \in A} B_p$ 的边界 $M := \partial B$ 是嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑黎曼平面, 满足 $c(M) = \pi$. 曲面 M 在 $(A \times \{-1/2, 1/2\}) \bigcup D$ 上是平坦的, 其中 $D := \{(x, y, z) \in M; x \leqslant 0, y \leqslant 0\}$. 对任意的 $p \in c$, 子午线 $\mu_p := M \bigcap B_p$ 是 M 的测地弧, 满足 $\bigcup\limits_{p \in c} \mu_p = M \setminus \text{int}\ (A \times \{-1/2, 1/2\})$. 将 $c - \{p_a\}$ 分解为三段子弧: c_0, c_+ 和 c_-, 其中 c_0 为闭的 y 轴负半轴, c_+ 为原点和 p_a 之间的有界开子弧, c_- 为从 p_a 出发的渐近于 x 轴正半轴的无界开子弧. 则有 $D = \bigcup\limits_{p \in c_0} \mu_p$, $M^+ = \bigcup\limits_{p \in c_+} \mu'_p$, 且 $M^- = \bigcup\limits_{p \in c_-} \mu'_p$, 其中 $\mu'_p := \mu_p - \{\text{极点}\}$, 且 $M^\pm$ 分别为 M 的正或负曲率轨迹. 记 $\hat{c} := M \bigcap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, 按照从 c 到 $\hat{c}$ 的法投影, 设 c_* 映到 $\hat{c}$ 的像为 $\hat{c}_*$, 其中 $* = 0, +, -$. 容易证明在 M 的所有完备测地线中, 与 $\hat{c}_0$ 正交的测地线是简单的, 与 $\hat{c}_-$ 正交的测地线是正则的, 且它们在 $\hat{c}_0$ 上的二重点具有单位指标. 在任意接近无穷处 M 中存在着上述两类完备测地线.

定理 8.2.4 若黎曼平面 M 满足 $\displaystyle\int_M G_+ \mathrm{d}M < 2\pi$, 则任一完备测地线是半正则的, 且

$$\text{ind}\ \gamma < \frac{\pi}{2\pi - \displaystyle\int_M G_+ \mathrm{d}M}.$$

定理 8.2.5　设黎曼平面 M 满足 $c(M)=2\pi$, 则对任意 $n\geqslant 1$, 存在 M 的紧致子集 K_n, 使得任意在 M 中且在 K_n 外的恰当完备测地线满足

$$\max \mathrm{rot}\ \gamma \geqslant n.$$

由定理 8.2.1 和 8.2.5 可以直接得到以下推论.

推论 8.2.1　设扩张黎曼平面 M 满足 $c(M)=2\pi$, 则对任意 $n\geqslant 1$, 存在 M 的紧致子集 K_n, 使得任意在 M 中且在 K_n 外的完备测地线 γ 是半正则的, 且指标 $\mathrm{ind}\ \gamma \geqslant n$.

关于任意接近无穷处的完备测地线的存在性, 我们有:

定理 8.2.6　(1) 若 M 为收缩黎曼平面, 则存在 M 的紧致子集, 它与 M 的任意完备测地线有交集.

(2) 若 M 为扩张黎曼平面, 则对 M 的任意子集 K, 存在 M 的完备测地线不与 K 相交.

§3　测地线的半正则性

在本节中假设黎曼平面 M 的全曲率存在. 本节的目的是证明测地线的半正则性 (见定理 8.3.3).

引理 8.3.1　对 M 的任意紧致子集 K, 存在 M 中包含 K 的紧致圆盘区域 C, 它是局部凸的或局部凹的.

证明　为证明引理的结论, 我们假设 K 是紧致圆盘区域. 设 $\{p_i\}$ 为 $M\setminus K$ 中的点列, 使得当 $i\to\infty$ 时, $d(p_i,K)\longrightarrow+\infty$. 在 $\overline{M\setminus K}$ 中所有以 p_i 为基点的非零伦回路中, 可以对每个 i 选取极小回路 c_i, 则每个 c_i 是围成紧致圆盘区域 D_i 的简单闭曲线, D_i 包含 K, 并且除可能在点 p_i 之外, 是局部凸的. 若对 i_0, c_{i_0} 不与 K 相交, 则它一定是测地回路, 并且 $D_{i_0}=:C$ 不是局部凸的就是局部凹的 (实际上, D_{i_0} 是由简单闭测地线围成的泪珠形的, 番茄形的, 或圆盘区域). 假设每个 c_i 与 K 相交, 对所有 i, 在 $U:=\overline{M\setminus K}$ 的万有覆盖空间 $\tilde{U}$ 的公共基本区域 $D(\sigma^0,\sigma^1)$ 中选取 p_i 的提升 $\tilde{p}_i$, 其中 σ 是 M 中从 K 出发的射线. 对每个 i, 设 $pr^{-1}(c_i)$ 连接 $\tilde{p}_i$ 和 $\partial\tilde{U}$, 存在它的两条不同的子弧 α_i 和 β_i, 由 c_i 的极小性可知它们都包含在 $D(\sigma^{-1},\sigma^2)$ 中. 应用引理 3.2.2 可知 D_i 在 p_i 处的内角趋于 0. 因此对充分大的 i, D_i 是局部凸的. 证毕.

定义 8.3.1 (黎曼平面的分类) M 的局部凸 (或局部凹) 填充定义为 M 的紧致局部凸 (或局部凹) 可缩子集族 $\mathcal{F}$, 使得对 M 的任意紧致子集 K, 存在 $C \in \mathcal{F}$, 满足 $K \subset C$. 由引理 8.3.1, 黎曼平面可以划分为以下三种情形:

(1) (收缩情形) M 具有局部凹填充且没有局部凸填充. 这种情形称为收缩的.

(2) (扩张情形) M 具有局部凸填充且没有局部凹填充. 这种情形称为扩张的.

(3) (稳定情形) M 既有局部凸填充又有局部凹填充. 这种情形称为稳定的.

命题 8.3.1 黎曼平面 M 是稳定的当且仅当 M 具有简单闭测地线序列 $\{\gamma_i\}$, 使得对取定的点 $p \in M$, 当 $i \to \infty$ 时, $d(p, \gamma_i) \to +\infty$.

证明 假设 M 是稳定的, 则存在 M 中局部凹圆盘区域的单调递增序列 $\{C_i\}$, 使得 $\bigcup\limits_i C_i = M$. 对每个 i, 可以选取局部凹圆盘区域 $C'_i \supset C_i$. 由于每个 $C'_i \setminus C_i$ 是局部凸的, 且同伦等价于 S^1, 若选取 $C'_i \setminus C_i$ 中的非零伦极小闭曲线 γ_i, 则它必为简单闭测地线. 显然 $d(p, \gamma_i) \to +\infty$.

反之, 假设存在这样的简单闭测地线序列 $\{\gamma_i\}$, 每个 γ_i 包围了一个紧致圆盘区域 $\Delta(\gamma_i)$. 选取任意紧致圆盘区域 K, 使得 $\int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M < 2\pi$. 我们略去 $D_i \bigcap K = \varnothing$ 的情形, 因为 $c(D_i) = 2\pi$. 若 i 充分大, 则 $\gamma_i \bigcap K = \varnothing$, 因此 $\Delta(\gamma_i)$ 包含 K. 由 K 的任意性可知 $\mathcal{F} := \{\Delta(\gamma_i)\}$ 是局部凸和局部凹填充. 证毕.

对 M 的紧致子集 K, 记

$$\begin{aligned}\delta(K) &:= 2\pi - \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M - \max\{0, c(K)\} \\ &= \min\left\{2\pi - \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M\ ,\ 2\pi - \int_M G_+ \mathrm{d}M + \int_K G_- \mathrm{d}M\right\}.\end{aligned}$$

若 $c(M) > -\infty$, 则有

$$\delta(K) = \min\left\{2\pi - \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M\ ,\ \lambda_\infty(M) - \int_{M\setminus K} G_- \mathrm{d}M\right\}.$$

容易得到以下的引理.

引理 8.3.2 设 K 和 K' 是 M 的两个紧致子集.

(1) 若 $K \subset K'$, 则 $\delta(K) \leqslant \delta(K')$.

(2) 若 $K \subset K'$ 或 $K \bigcap K' = \varnothing$ 两者之一成立, 则 $2\pi - c(K') \geqslant \delta(K)$.

(3) 当 $K \to M$ 时, $\delta(K) \to \lambda_\infty(M)$.

(4) $\delta(\varnothing) = 2\pi - \int_M G_+ \mathrm{d}M$.

命题 8.3.2　若 $c(M) < 2\pi$, 则 M 是扩张的.

证明　因为 $\lambda_\infty(M) > 0$, 由引理 8.3.2 的 (3) 可知, 存在 M 的可缩紧致子集 K, 使得 $\delta(K) > 0$. 由引理 8.3.2 的 (2) 和 Gauss-Bonnet 定理, M 的任意包含 K 的紧致可缩子集 K' 不是局部凹的, 因此 M 为扩张的. 证毕.

设黎曼流形 A 微分同胚于圆环 $S^1 \times [0,1]$, A_n 和 A_w 是 ∂A 的两个连通分支. 对于 A 中的弧 α, 记 $\Delta(\alpha)$ 为 α 和 $A \setminus \alpha$ 的所有不与 A_w 相交的连通分支的并集. 记 $\iota_* : (A, A_*) \to (D^2, \partial D^2)$ (其中 $* = n, w$) 为嵌入; D^2 是 2 维单位圆盘.

引理 8.3.3　设 int A 中的测地弧 γ 满足:

(1) 若 γ 非简单, 则它具有非零伦的子弧, 其为简单测地回路.

(2) 对 γ 的任意子弧段 $\hat{\gamma}$, 区域 $\Delta(\hat{\gamma})$ 不是局部凹的.

则 $\iota_w \circ \gamma$ 和 $\iota_n \circ \gamma$ 分别是 D^2 中的半正则和反向半正则弧.

证明　设 $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ 是测地弧. 若 γ 是简单的, 则结论是平凡的. 因此假设 γ 非简单, 则可以选取子弧 $\gamma\mid_{[a_1,b_1]}$, 使其为简单测地回路. 由 (2) 中的条件可知 $\angle_{p_1}\Delta(\gamma\mid_{[a_1,b_1]}) < \pi$, 其中 $p_1 := \gamma(a_1) = \gamma(b_1)$, 因而 $\iota_w \circ \gamma\mid_{[a_1,b_1]}$ 是半正则的. 现在假设子弧 $\iota_w \circ \gamma\mid_{[a_k,b_k]}$ 是半正则的, 且 $\gamma(a_i) = \gamma(b_i) := p_i$ 是 $\gamma\mid_{[a_k,b_k]}$ 的二重点, 其中 $i = 1, \cdots, k$, $a_k < \cdots < a_1 < b_1 < \cdots < b_k$. 由于 γ 至多有有限多个交叉点, 故只需要证明若 γ 有不同于点 $p_1, \cdots, p_k$ 的自相交点, 则可选取二重点 $p_{k+1} = \gamma(a_{k+1}) = \gamma(b_{k+1})$, 使得 $a_{k+1} < a_k$, $b_k < b_{k+1}$, 且 $\iota_w \circ \gamma\mid_{[a_{k+1},b_{k+1}]}$ 是半正则的. 我们来证明:

子引理 8.3.1　子弧 $\gamma\mid_{(b_k,b]}$ 不与 $\gamma\mid_{[a_k,b_k]}$ 相交, 且没有自交点.

证明　假设结论不成立. 记

$$t_0 := \inf\{t \in (b_k, b]; \gamma(t) \in \gamma[a_k, t)\};$$

见图 8.3.1. 我们来证明 $D_0 := \Delta(\gamma|_{[a_k,t_0]})$ 是局部凹的, 而这与条件 (2) 矛盾. 注意到对于 A 中的测地弧 σ, $\Delta(\sigma)$ 是局部凹的当且仅当对任意的 $p \in \partial\Delta(\sigma)$, 存在 $v \in S_pM$ 和 $\epsilon > 0$, 使得对任何满足 $|\, t \,| < \epsilon$ 的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\exp_p tv \in \Delta(\sigma)$. 由于 $\Delta(\gamma\mid_{[a_k,b_k]})$ 在 p_k 点以外是局部凹的, 故只需要证明 D_0 在 p_k 和 $\gamma(t_0)$ 是局部凹的. 由于对充分小的 $\epsilon > 0$, $\gamma(b_k - \epsilon, b_k + \epsilon) \subset D_0$, 因此区域 D_0 在 p_k 处是局部凹的. 进而, 可以找到 $s_0 \in (a_k, t_0)$, 使得 $\gamma(s_0) = \gamma(t_0)$. 则对充分小的 $\epsilon > 0$, 有 $\gamma(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon) \subset D_0$. 因此 D_0 是局部凹的. 矛盾. 证毕.

类似于子引理 8.3.1, 我们有 $\gamma\mid_{[a,a_k)}$ 不与 $\gamma\mid_{[a_k,b_k]}$ 相交, 并且没有自交点.

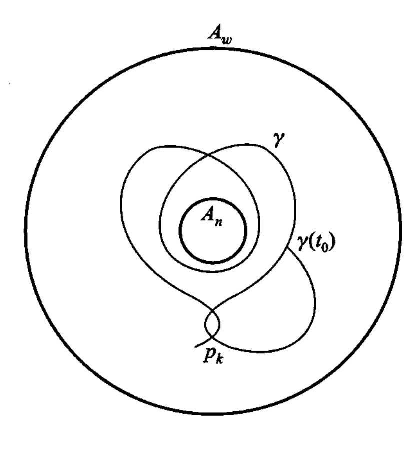


图 8.3.1

假设存在除 $p_1, \cdots, p_k$ 之外的 γ 的自交点, 则 $\gamma[a, a_k) \bigcap \gamma(b_k, b]$ 非空. 因而存在 $a_{k+1} \in [a, a_k)$ 和 $b_{k+1} \in (b_k, b]$, 使得 $\gamma(a_{k+1}) = \gamma(b_{k+1})$ 且 $\gamma(a_{k+1}, a_k) \bigcap \gamma(b_k, b_{k+1}) = \varnothing$. 由于由条件 (2), $\Delta(\gamma|_{[a_{k+1}, b_{k+1}]})$ 不是局部凹的, 故其在 p_{k+1} 必为凸的. 因此 $\iota_w \circ \gamma|_{[a_{k+1}, b_{k+1}]}$ 是半正则弧. 于是证明了引理 8.3.3. 证毕.

定理 8.3.1 (测地弧的半正则性) 对于黎曼平面 M 有以下结论成立:

(1) 若 M 是扩张的, 则 M 中充分接近无穷处的任一测地弧是半正则的.

(2) 若 M 是收缩的, 则 M 中充分接近无穷处的任一测地弧是反向半正则的.

(3) 若 $\int_M G_+ \mathrm{d}M \leqslant 2\pi$, 则任一非闭测地弧是半正则的.

证明 (1) 和 (2) 设黎曼平面 M 是扩张的或收缩的, 则存在具有光滑边界的紧致圆盘区域 K, 使得

(i) $\int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M \leqslant \pi$.

(ii) 若 M 是扩张的 (或收缩的), 则不存在包含 K 的局部凹 (或局部凸) 可缩紧致子集.

设测地弧 γ 在 M 中且在 K 之外, 选取 M 中具有光滑边界的紧致圆盘区域 K', 使得 $\gamma \bigcup K \subset \operatorname{int} K'$. 记 $A := \overline{K' \setminus K}$, 且

$$A_n := \partial K, \quad A_w := \partial K', \qquad \text{若 } M \text{ 是扩张的;}$$
$$A_n := \partial K', \quad A_w := \partial K, \qquad \text{若 } M \text{ 是收缩的.}$$

为了说明引理 8.3.3 的条件 (1), 我们假设存在 γ 的子弧段, 其为零伦的简单测地回路; 则由 Gauss-Bonnet 定理, 它围成了全曲率 $> \pi$ 的圆盘区域, 这与 (i) 矛盾.

由 (ii) 可得引理 8.3.3 中的条件 (2). 注意到引理 8.3.3 中 $\Delta(\hat{\gamma})$ 的定义依赖于 A_n 包含于 ∂K 的分支的哪一边, 由引理可得定理的 (1) 和 (2).

(3) 设 γ 为 M 中的非简单非闭测地弧, 且 $\int_M G_+ \mathrm{d}M \leqslant 2\pi$. 则存在子弧 $\gamma|_{[a_1,b_1]}$, 它是一个简单测地回路. 选取 M 中的两个具有光滑边界的紧致圆盘区域 K 和 K', 使得 $K \subset \operatorname{int} \Delta(\gamma|_{[a_1,b_1]})$ 且 $\gamma \bigcup K \subset \operatorname{int} K'$. 对 $A := \overline{K' \setminus K}$, $A_n := \partial K$, $A_w := \partial K'$ 和 γ 应用引理 8.3.3, 其中引理 8.3.3 的条件 (1) 是平凡的, 由条件 (2), Gauss-Bonnet 定理和 $\int_M G_+ \mathrm{d}M \leqslant 2\pi$ 可知任一局部凹区域一定由一条简单闭测地线围成; 由于 γ 非简单, 因此可得条件 (2). 证毕.

注 8.3.1 设 M 中的测地线 γ 的任何子弧段是半正则的, 则可以得到若 γ 是非恰当的, 则 γ 是半正则的, 且由定理 8.3.1 不能直接得出定理 8.2.1. 然而, 存在 γ 的二重点序列 $\cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots$, 使得 $\gamma(a_i) = \gamma(b_i), i = 1, 2, \cdots$.

命题 8.3.3 对黎曼平面 M 有以下结论成立:

(1) 若 $\int_M G_+ \mathrm{d}M \leqslant 2\pi$, 则任一闭测地线是简单的.

(2) 若 $\int_M G_+ \mathrm{d}M < 2\pi$, 则 M 中不存在闭测地线.

证明 对任一闭测地线 γ, 对区域 $\Delta(\gamma)$ 应用 Gauss-Bonnet 定理即得. 证毕.

练习 8.3.1 对于 M 的可缩紧致子集 K 证明以下结论:

(1) 若 $\delta(K) \geqslant 0$, 则

(i) 任何在 M 中且在 K 之外的闭测地线都是简单的.

(ii) 任何在 M 中且在 K 之外的非闭测地弧 γ 是半正则的.

(2) 若 $\delta(K) > 0$, 则不存在 M 中且在 K 之外的闭测地线.

引理 8.3.4 (1) 设 M 中的紧致圆盘区域 K 满足, 对某个 $\rho > 0$, $K^\rho := \{x \in K; d(x, \partial K) \geqslant \rho\}$ 是可缩的且 $\delta(K^\rho) > 0$, 则在 M 中且在 K 之外的任意半测地线是恰当的.

(2) 若 $\int_M G_+ \mathrm{d}M < 2\pi$, 则 M 中的任意半测地线是恰当的.

注意若 $c(M) < 2\pi$, 则 (1) 中定义的圆盘区域 K 一定存在.

证明 若 $\int_M G_+ \mathrm{d}M < 2\pi$, 则记 K 为空集, 否则设其如 (1) 中所定义. 若 $K = \varnothing$, 记 $\rho := +\infty$. 在两种情形中我们都有 $\delta(K) > 0$. 为了证明 (1) 和 (2), 只需要证明满足 $\gamma \bigcap K = \varnothing$ 的任意半测地线 γ 是恰当的. 假设存在非恰当半测地线 $\gamma : [0, +\infty) \longrightarrow M$, 使得 $\gamma \bigcap K = \varnothing$, 则存在序列 $t_i \nearrow +\infty$, 使得 $\dot{\gamma}(t_i)$ 趋

向于某一个非零向量 $v \in T_pM$, $p \in \overline{M \setminus K}$. 对于 $r := \min\{\rho, \text{conv } p\}/2$, 存在 i_0, 使得对任意的 $i \geqslant i_0$, $\gamma(t_i) \in B(p,r)$ 且 $t_i + 4r < t_{i+1}$. 对每个 $i \geqslant i_0$, 可以找到唯一的从 $\gamma(t_{i+1})$ 到 $\gamma(t_i + r)$ 的测地线段 $\sigma_i : [0, s_i] \longrightarrow B(p, 2r)$, 使得它的像与 $\gamma_i := \gamma\,|_{[t_i+r, t_{i+1}]}$ 的像不同. 每个 $\Delta(\gamma_i \bigcup \sigma_i)$ 至多具有两个正的外角, 可能在 $\gamma(t_i + r)$ 和 $\gamma(t_{i+1})$ 处, 当 $i \to +\infty$ 时, 它们都趋于 0. 因此由 Gauss-Bonnet 定理,

$$\liminf_{i \to \infty} c(\Delta(\gamma_i \bigcup \sigma_i)) \geqslant 2\pi.$$

对 $i \geqslant i_0$, 所有的测地线 σ_i 以及$\gamma_i \bigcup \sigma_i$ 与 K^ρ 均不相交, 其中若 $K = \varnothing$, 则记 $K^\rho = \varnothing$. 由于 $\Delta(\gamma_i \bigcup \sigma_i)$ 包含 K 或者不与 K 相交, 由引理 8.3.2 的 (2) 知, 对任意的 $i \geqslant i_0$,

$$c(\Delta(\gamma_i \bigcup \sigma_i)) \leqslant 2\pi - \delta(K^\rho),$$

矛盾. 证毕.

本章中多次用到以下的简单引理.

引理 8.3.5 若 $K \subset D \subset M$, 则

$$c(M) - \int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M \leqslant c(D) \leqslant c(M) + \int_{M \setminus K} G_- \mathrm{d}M.$$

证明 由

$$c(D) = c(M) - c(M \setminus D),$$
$$-\int_{M \setminus K} G_- \mathrm{d}M \leqslant c(M \setminus D) \leqslant \int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M,$$

即得引理结论. 证毕.

引理 8.3.6 假设 M 的可缩子集 K 满足 $\int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M < c(M) - \pi$, 则 M 中没有在 K 之外的简单恰当完备测地线.

注意若 $c(M) > \pi$, 则这样的 K 一定存在.

证明 假设 M 中存在 K 之外的简单恰当完备测地线, 这样的测地线将 M 分割为两个黎曼半平面, 其中包含 K 的一个记为 H. 由 Cohn-Vossen 定理可知 $c(H) \leqslant \pi$. 然而由引理 8.3.5 得

$$c(H) \geqslant c(M) - \int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M > \pi,$$

矛盾. 证毕.

引理 8.3.7 假设 $c(M)=2\pi$ 且 M 中存在紧致圆盘区域 K, 使得 $\overline{M\setminus K}$ 中不包含简单闭测地线, 而对某个 $\rho>0$, K^ρ 是可缩的, 且 $\int_{M\setminus K^\rho} G_+\mathrm{d}M<\pi$, 则 K 之外的任何简单半测地线是恰当的.

注意到若 M 为收缩的或扩张的, 则这样的 K 一定存在.

证明 设 C 为 M 的紧致子集, $0<\delta<\min\{\rho,r\}$, 其中 $r:=\operatorname{conv} C$, 且 $\gamma:[t-r,t'+r]\longrightarrow M$ 是 K 之外的简单测地弧, $t<t'$. 我们考虑以下的条件:

(i) $\gamma(t),\gamma(t')\in C$, $t'-t>r$, $d(\gamma(t),\gamma(t'))<\delta$.

在 (i) 的条件下, 对于从 $\gamma(t)$ 到 $\gamma(t')$ 的唯一极小测地线 $\sigma:[0,l]\longrightarrow M$, 我们给出第二个条件:

(ii) 两个基 $(\dot\gamma(t),\dot\sigma(0))$ 和 $(\dot\gamma(t'),\dot\sigma(l))$ 的定向相反 (见图 8.3.2).

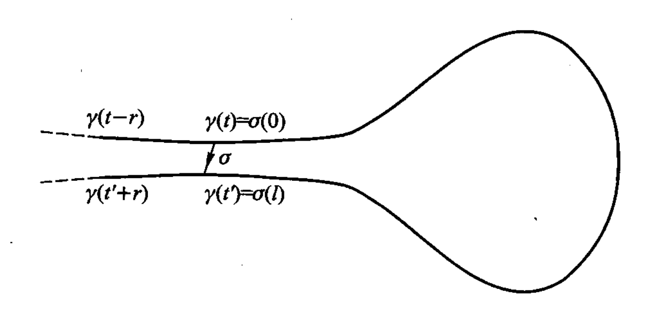


图 8.3.2

子引理 8.3.2 对 M 的任意紧致子集 C, 存在 $0<\delta<\min\{\rho,r\}$, 使得不存在 K 之外的简单测地弧 $\gamma:[t-r,t'+r]\longrightarrow M$ 同时满足条件 (i) 和 (ii).

证明 采用反证法. 假设对任意的 $\delta\in(0,\min\{\rho,r\})$, 存在 M 的紧致子集 C, 和 K 之外的简单测地弧 $\gamma_\delta:[t_\delta-r,t'_\delta+r]\longrightarrow M$ 满足条件 (i) 和 (ii). 如若需要, 对每个 δ 取 γ_δ 的子弧段, 可以假设 γ_δ 只在 $\gamma_\delta(t_\delta)=\sigma_\delta(0)$ 和 $\gamma_\delta(t'_\delta)=\sigma_\delta(l)$ 处与 σ_δ 相交, 其中 σ_δ 如条件 (ii) 中所述, 于是 $\gamma_\delta|_{[t_\delta,t'_\delta]}\bigcup\sigma_\delta$ 构成一条简单闭曲线. 由于 γ_δ 简单, 由三角比较定理 (定理 1.7.4) 容易得到, 对任意的 $s\in[-r/2,r/2]$,

$$d(\gamma_\delta(t_\delta-s),\gamma_\delta(t'_\delta+s))<\omega(\delta),$$

其中当 $\delta\to0$ 时, 函数 $\omega(\delta)\to0$, 且只与 r 以及 C 上 M 的 Gauss 曲率绝对值的上确界有关. 由三角比较定理 (定理 1.7.4) 以及条件 (ii), 容易证明

$$|\angle(\dot\gamma_\delta(t_\delta),\dot\sigma_\delta(0))-\angle(-\dot\gamma_\delta(t'_\delta),\dot\sigma_\delta(l))|<\omega(\delta).$$

记 D_δ 为 $\gamma|_{[t_\delta,t'_\delta]}\bigcup\sigma$ 围成的圆盘区域. 由以上的不等式和 Gauss-Bonnet 定理

可得

$$| c(D_\delta) - \pi | < \omega(\delta).$$

注意到 $\partial D_\delta = \gamma_\delta |_{[t_\delta, t'_\delta]} \bigcup \sigma_\delta$ 可能与 K 相交, 但不与 K^ρ 相交. 若 D_δ 包含 K^ρ, 则有 $2\pi - c(D_\delta) = c(M \setminus D_\delta) \leqslant \int_{M\setminus K^\rho} G_+ \mathrm{d}M$, 结合以上的不等式可得 $0 < \pi - \int_{M\setminus K^\rho} G_+ \mathrm{d}M < \omega(\delta)$; 这与 δ 的任意性矛盾. 因此 D_δ 包含于 $\overline{M \setminus K^\rho}$, 于是 $c(D_\delta) \leqslant \int_{M\setminus K^\rho} G_+ \mathrm{d}M$. 矛盾. 证毕.

为了证明引理 8.3.7, 我们假设存在 K 之外的非恰当简单半测地线 γ, 则存在序列 $a_i \to +\infty$, 使得 $\dot\gamma(a_i)$ 趋向于向量 $v \in T_pM$, $p \in \overline{M \setminus K}$. 设 $\{C_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 为 M 的紧致子集组成的单调递增序列, 使得 $\bigcup_i C_i = M$ 且 $p \in \mathrm{int}\, C_1$. 如子引理 8.3.2 所述, 设 δ_i 与 C_i 相对应. 对于垂直于 v 的向量 $w \in T_pM$, 定义测地线 $\sigma : (-\delta/2, \delta/2) \longrightarrow M$ 为 $\sigma(t) := \exp_p tw, t \in (-\delta/2, \delta/2)$, 其中 δ 充分小, 使得 $\delta \leqslant \delta_1$ 且 $\sigma \subset C_1$. 设任意四个数 s, s', t 和 t' 满足 $s \neq s'$, $t \neq t'$, $\sigma(s) = \gamma(t)$, $\sigma(s') = \gamma(t')$, 且 $\sigma_{s,s'} := \sigma |_{(\min\{s,s'\},\max\{s,s'\})}$ 不与 $\gamma_{t,t'} := \gamma |_{(\min\{t,t'\},\max\{t,t'\})}$ 相交; 见图 8.3.3. 由子引理 8.3.2 可知 $(\dot\sigma(s), \dot\gamma(t))$ 和 $(\dot\sigma(s'), \dot\gamma(t'))$ 诱导了 M 的相同的定向, 且 $\gamma - \gamma_{t,t'}$ 不与 $\sigma_{s,s'}$ 相交. 因此, σ 和 γ 的交点可以表示为 $\sigma(s_j) = \gamma(t_j), j = 1, 2, \cdots$, 其中 $s_j \to 0$ 和 $t_j \nearrow +\infty$ 是单调序列. 如若需要, 取 σ 的反向参数, 可以假设 $\{s_j\}$ 单调递增. 我们得到:

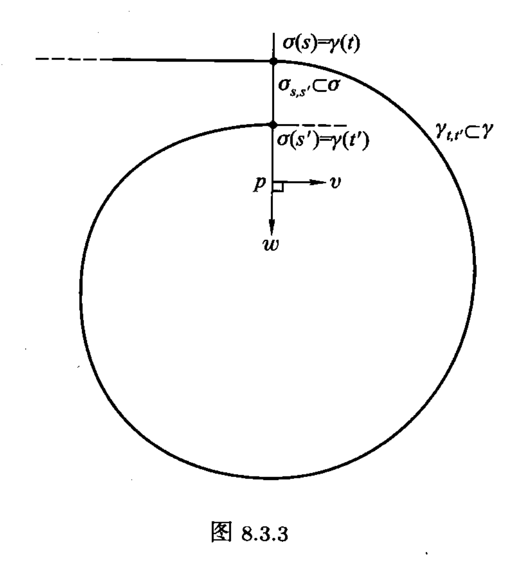


图 8.3.3

子引理 8.3.3 对任意的 i, j, t, t', 若满足 $t_j \leqslant t < t' \leqslant t_{j+1}$, $d(\gamma(t), \gamma(t')) < \delta_i$

且 $\gamma(t), \gamma(t') \in C_i$, 则

$$\min\{t'-t, t-t_j+t_{j+1}-t'-(s_{j+1}-s_j)\} < \delta_i.$$

证明 $\sigma|_{[s_j,s_{j+1}]} \bigcup \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 构成了具有两个折点的简单闭曲线,对 $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 应用子引理 8.3.2 即得结果. 证毕.

记 D_j 为 $\sigma|_{[s_j,s_{j+1}]} \bigcup \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 围成的圆盘区域, 注意 $\{D_j\}$ 是单调序列. 若 γ 有界, 则由子引理 8.3.3, 极限集 $D_\infty := \lim\limits_j D_j$ 是圆盘区域, 其边界为简单闭测地线 $\gamma_\infty := \lim\limits_j \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$, 且它不与 $\mathrm{int}\, K$ 相交. 闭测地线 γ_∞ 的存在性与假设矛盾, 因此 γ 无界. 于是 $\{D_j\}$ 单调递增, 且极限集 $D_\infty = \bigcup\limits_j D_j$ 有界, 边界为极限 $\gamma_\infty = \lim\limits_j \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$, 它由不与 $\mathrm{int}\, K$ 相交且互不相交的简单完备测地线组成. 由引理 8.3.6, 在 M 中且在 $\mathrm{int}\, K$ 之外的任意简单完备测地线非恰当, 因此 γ_∞ 的每个分支 $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow M$ 非恰当. 所以存在序列 $\{b_k\}$, 使得 $|b_k| \to +\infty$, 且 $\tau(b_k)$ 趋向于点 $q \in M$. 取 i_0 使得 $q \in \mathrm{int}\, C_{i_0}$, 并取充分小的 $r \in (0, \delta_{i_0}]$, 使得 $B(q,r) \subset \mathrm{int}\, C_{i_0}$. 因为 $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 的子弧段趋向于 τ, 故当 $j \to +\infty$ 时 $B(q,r) \bigcap \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 的分支个数趋向于 $+\infty$. 这与子引理 8.3.3 矛盾, 于是便完成了引理 8.3.7 的证明. 证毕.

定理 8.3.2 若 M 是收缩的或扩张的, 则 M 中充分接近无穷处的任意测地线是恰当的.

证明 当 $c(M) < 2\pi$ 时, 由引理 8.3.4 的 (1) 可得结论. 当 $c(M) = 2\pi$ 时, 由定理 8.3.1 (另见注 8.3.1) 可知充分接近无穷处的任意半测地线包含一条简单半子测地线, 由引理 8.3.7 可知其为恰当的. 证毕.

下面的定理包含定理 8.2.1.

定理 8.3.3 (完备测地线的半正则性) (1) 若 M 是扩张的, 则 M 中充分接近无穷处的任意完备测地线是半正则的.

(2) 若 $\int_M G_+ \mathrm{d}M < 2\pi$, 则 M 中任意完备测地线是正则的.

证明 (1) 由定理 8.3.1 的 (1) 和定理 8.3.2 可得.

(2) 由定理 8.3.1 的 (3) 和引理 8.3.4 的 (2) (另见定理 8.3.2 的证明) 可得.

§4 测地线的几乎正则性与指标估计

设 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ 为黎曼平面 M 中的半正则测地线. 由 § 8.1 中的记号, 记

$\{B_i\}$ 为 M 中与 γ 相关联的圆盘区域序列, 对 $j=1,\cdots,\mathrm{ind}\ \alpha-1$, 记 $D_j := B_{k(j)}\bigcup\cdots\bigcup B_{k(j+1)-1}$. 进而, 当 $\mathrm{ind}\ \alpha<\infty$ 时, 记 $D_{\mathrm{ind}\ \alpha} := B_{k(\mathrm{ind}\ \alpha)}$. 对 $j=1,\cdots,\mathrm{ind}\ \gamma-1$, 记 $\theta_0 := \pi$, $\theta_j := \angle_{p_{k(j+1)-1}}B_{k(j+1)-1}$, $\varphi_j := \angle_{p_{k(j)}}B_{k(j)}$. 当 $\mathrm{ind}\ \gamma<\infty$ 时, 记 $\varphi_{\mathrm{ind}\ \gamma} := \theta_{\mathrm{ind}\ \gamma} := \angle_{p_{k(\mathrm{ind}\ \gamma)}}D_{\mathrm{ind}\ \gamma}$.

引理 8.4.1 若存在常数 $c<2\pi$, 使得对每个 $j=1,\cdots,\mathrm{ind}\ \gamma$, $c(D_j)\leqslant c$, 则

$$\mathrm{ind}\ \gamma<\frac{\pi}{2\pi-c}.$$

证明 对每个 D_j 应用 Gauss-Bonnet 定理得

$$2\pi+\theta_j-\theta_{j-1}\leqslant c(D_j)\leqslant c.$$

对 $j=1,\cdots,\mathrm{ind}\ \gamma$ 求和便得结论. 证毕.

定理 8.2.4 的证明 由定理 8.3.3 的 (2), M 中的任意完备测地线 γ 是半正则的. 对 $c:=\int_M G_+\mathrm{d}M$ 应用引理 8.4.1 得到 γ 的指标估计. 证毕.

引理 8.4.2 设 γ 为半正则测地线, 对某个 $j\geqslant 1$, $k(j)=j$. 若存在常数 c', 使得对每个 $i=1,\cdots,j$, $c(B_i)\geqslant c'$, 则

$$\varphi_j\geqslant\pi-j(2\pi-c'),$$

且若对某个 $i=1,\cdots,j$, $c(B_i)>c'$, 则

$$\varphi_j>\pi-j(2\pi-c').$$

证明 由 Gauss-Bonnet 定理, 对每个 $i=1,\cdots,j$,

$$2\pi+\varphi_i-\varphi_{i-1}=c(B_i).$$

即得引理结论. 证毕.

这里我们来介绍一种方法以证明测地线的正则性, 并对指标做出估计 (见定理 8.2.2 和 8.2.3). 假设 $-\infty<c(M)<2\pi$, 选取 M 中充分大的紧致圆盘区域 K. 设 γ 是在 M 中且在 K 之外的完备测地线, 则由定理 8.3.3 可知它是半正则的. 记满足 $k(j)=j$ 的 j 值中最大的为 j_0. 由于每个 D_i 包含 K, 故每个 $c(D_i)$ 近似等于 $c(M)$. 为方便起见, 假设对任意 $i=1,\cdots,j_0$, $c(D_i)=c(M)$. 由引理 8.4.1, 得到对 γ 的指标的上界估计. 若 $a:=\pi-j_0(2\pi-c(M))>0$, 则由引理 8.4.2 可得 $\varphi_{j_0}\geqslant a$, 假设 $\int_{M\setminus K}G_+\mathrm{d}M<a$, 若 B_{j_0+1} 存在且为柠檬形, 则 $\int_{M\setminus K}G_+\mathrm{d}M\geqslant c(B_{j_0+1})\geqslant\varphi_{j_0}\geqslant a$, 矛盾. 由此得到了 γ 的几乎正则性. 最后,

我们来证明 $\varphi_{\operatorname{ind}\gamma}$ 充分小, 使得 $\varphi_{\operatorname{ind}\gamma} \geqslant \pi - \operatorname{ind}\gamma(2\pi - c(M))$ 给出指标的下界估计.

引理 8.4.3 设 M 的紧致可缩子集 K 满足 $\delta(K) > \pi$, 则 K 之外的任意测地线是简单的.

注意由引理 8.3.2 的 (3), 若 $c(M) < \pi$, 则 M 的充分大的紧致子集 K 满足 $\delta(K) > \pi$.

证明 假设存在 K 之外的非简单测地线, 则它具有为简单测地回路的子弧段. 由 Gauss-Bonnet 定理, 这条测地回路围成的圆盘区域 D 满足 $c(D) > \pi$. 若 $D \bigcap K = \varnothing$, 则 $\pi < c(D) \leqslant \int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M \leqslant 2\pi - \delta(K)$, 这与 $\delta(K) > \pi$ 矛盾. 若 $D \supset K$, 则 $\pi \geqslant \pi - \int_{M \setminus D} G_+ \mathrm{d}M = \delta(D) \geqslant \delta(K)$. 证毕.

对于 $\theta > 0$, 记

$$n(\theta) := \max\{k \in \mathbb{Z}; k\theta < \pi\}, \qquad n'(\theta) := [\pi/\theta],$$
$$\epsilon_+(\theta) := \frac{\pi - n(\theta)\theta}{n'(\theta)+1}, \qquad \epsilon_-(\theta) := \frac{(n'(\theta)+1)\theta - \pi}{n'(\theta)+1}.$$

则有

$$n'(\theta) - n(\theta) = \begin{cases} 0, & 若\ \pi/\theta \notin \mathbb{Z}; \\ 1, & 若\ \pi/\theta \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
$$\pi - n(\theta) = \min\{\pi - k\theta; k \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant k\theta < \pi\},$$
$$(n'(\theta)+1)\theta - \pi = \min\{k\theta - \pi; k \in \mathbb{Z}, k\theta > \pi\}.$$

并且特别地, 对任意的 $\theta > 0$, $\epsilon_\pm(\theta)$ 为正的.

以下假设 $-\infty < c(M) < 2\pi$, 且 M 的紧致可缩子集 K 满足

$$\int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M < \epsilon_+(\lambda_\infty(M)), \quad \int_{M \setminus K} G_- \mathrm{d}M < \epsilon_-(\lambda_\infty(M)).$$

注意存在这样的 K 且满足 $\delta(K) > 0$. 为简便起见, 记

$$\epsilon_\pm := \epsilon_\pm(\lambda_\infty(M)), \qquad n := n(\lambda_\infty(M)), \qquad n' := n'(\lambda_\infty(M)).$$

命题 8.4.1 (指标的上界估计) 对于在 M 中且在 K 之外的任意半正则完备测地线 γ, 指标满足

$$\operatorname{ind}\gamma \leqslant n',$$

且若 $M^- \subset K$, 则

$$\operatorname{ind}\gamma \leqslant n.$$

证明 设 $c := c(M) + \int_{M\setminus K} G_- \mathrm{d}M$, 则 $0 < \delta(K) \leqslant 2\pi - c$, 因而 $c < 2\pi$. 由引理 8.3.5, 对任意的 $j = 1, \cdots, \mathrm{ind}\,\gamma$, 有 $c(D_j) \leqslant c$. 应用引理 8.4.1 得

$$\mathrm{ind}\,\gamma < \frac{\pi}{\lambda_\infty(M) - \int_{M\setminus K} G_- \mathrm{d}M} < \frac{\pi}{\lambda_\infty(M) - \epsilon_-} = n' + 1.$$

若 $M^- \subset K$, 由于 $\int_{M\setminus K} G_- \mathrm{d}M = 0$, 故 $\mathrm{ind}\,\gamma < \pi/\lambda_\infty(M)$. 这表明 $\mathrm{ind}\,\gamma \leqslant n$. 证毕.

引理 8.4.4 (完备测地线的几乎正则性) 若在 M 中且在 K 之外的完备测地线 γ 是半正则但非正则的, 则 $\pi/\lambda_\infty(M)$ 是正整数, 且 γ 几乎正则, 指标 $\mathrm{ind}\,\gamma = n' = n + 1$.

证明 设 j_0 是使得与 γ 相对应的圆盘区域 B_{j+1} 为柠檬形的最小整数 j, 即使得 $k(j) = j$ 的最大整数 j. 设 $c' := c(M) - \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M$. 由于对任意 $j = 1, \cdots, j_0$, $c(D_j) \geqslant c'$ (见引理 8.3.5), 应用引理 8.4.2 得

$$\varphi_{j_0} \geqslant \pi - j_0 \left(\lambda_\infty(M) + \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M \right).$$

由 Gauss-Bonnet 定理, $\varphi_{j_0} < c(B_{j_0+1}) \leqslant \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M$, 结合以上可得

$$\pi - j_0 \lambda_\infty(M) \leqslant (j_0 + 1) \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M < (j_0 + 1)\epsilon_+.$$

由命题 8.4.1 可知 $j_0 \leqslant \mathrm{ind}\,\gamma \leqslant n'$, 因而

$$(j_0 + 1)\epsilon_+ \leqslant (n' + 1)\epsilon_+ = \pi - n\lambda_\infty(M).$$

所以有

$$n + 1 \leqslant j_0 \leqslant n'.$$

证毕.

命题 8.4.2 若 $M^+ \subset K$, 则 K 之外的任意半正则测地线都是正则的.

证明 由 Gauss-Bonnet 定理可知相应的柠檬形不存在. 证毕.

命题 8.4.3 (指标的下界估计) 若 γ 是在 M 中且在 K 之外的正则完备测地线, 则

$$\mathrm{ind}\,\gamma \geqslant n.$$

证明 若 $n=0$, 结论是平凡的. 假设 $n \geqslant 1$, 或等价地 $c(M) > \pi$, 由于 $\int_{M \setminus K} G_+ \mathrm{d}M < \epsilon_+ \leqslant \pi - \lambda_\infty(M) = c(M) - \pi$, 由引理 8.3.6 可知 γ 非简单. 由 § 8.1 中的记号, 记 $D_{\text{ind }\gamma+1}$ 是由 $\gamma(-\infty, a_{\text{ind }\gamma}] \bigcup \gamma[b_{\text{ind }\gamma}, +\infty)$ 围成的黎曼半平面, 且包含 $B_{\text{ind }\gamma} = D_{\text{ind }\gamma}$ (由命题 8.4.1, $\text{ind}\,\gamma$ 是有限的). 注意到 $D_{\text{ind }\gamma+1}$ 具有唯一的等于 $2\pi - \theta_{\text{ind }\gamma}$ 的内角. 由 Cohn-Vossen 定理知 $c(D_{\text{ind }\gamma+1}) \leqslant 2\pi - \theta_{\text{ind }\gamma}$, 结合 $c(D_{\text{ind }\gamma+1}) \geqslant c(M) - \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M$ (见引理 8.3.5) 可得

$$\theta_{\text{ind }\gamma} \leqslant \lambda_\infty(M) + \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M. \tag{8.4.1}$$

然而对 $c' := c(M) - \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M$ 应用引理 8.4.1 得

$$\theta_{\text{ind }\gamma} \geqslant \pi - \text{ind }\gamma \left(\lambda_\infty(M) + \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M \right).$$

因此

$$\text{ind }\gamma + 1 \geqslant \frac{\pi}{\lambda_\infty(M) + \int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M} > \frac{\pi}{\lambda_\infty(M) + \epsilon_+} \geqslant n(M).$$

证毕.

引理 8.4.5 假设 M^+ 有界, M^- 无界且 $\pi/\lambda_\infty(M)$ 为大于或等于 2 的整数. 若 $M^+ \subset K$, 则在 M 中且在 K 之外的任意正则完备测地线 γ 的指标满足

$$\text{ind }\gamma \geqslant n' = n + 1.$$

证明 由于 $\pi/\lambda_\infty(M) \geqslant 2$, 故 $c(M) \geqslant 3\pi/2 > \pi$. 因此由引理 8.3.6 可知 γ 非简单. 由于 M^- 无界且 $M^+ \subset K \subset B_1$, 我们有 $0 > c(M \setminus B_1) = c(M) - c(B_1)$, 因此 $c(B_1) < c' := c(M)$. 应用引理 8.4.1 得

$$\theta_{\text{ind }\gamma} > \pi - \text{ind }\gamma \lambda_\infty(M).$$

然而, 由 $\int_{M\setminus K} G_+ \mathrm{d}M = 0$ 并且应用 (8.4.1) 式得 $\theta_{\text{ind }\gamma} \leqslant \lambda_\infty(M)$. 因此

$$\text{ind }\gamma > \frac{\pi}{\lambda_\infty(M)} - 1 = n' - 1 = n.$$

证毕.

定理 8.2.2 和 8.2.3 的证明 由命题 8.4.1, 8.4.3 和引理 8.4.4 可得定理 8.2.2 和 8.2.3 的 (1)、(3).

定理 8.2.3 的 (2) 可由命题 8.4.1, 8.4.3, 8.4.2 和引理 8.4.5 得到. 证毕.

§5 恰当完备测地线的旋转数

本节的目的是证明定理 8.2.5.

定理 8.2.5 的证明 对于任意给定的 $n \geqslant 1$, 选取 M 中具有光滑边界的紧致圆盘区域 C, 使得 $\int_{M\setminus C} |G| \,\mathrm{d}M < 1/(100n)$. 进而, 可以使得 C 同时满足

$$\lambda_{\mathrm{abs}}(\partial C) \leqslant \int_{M\setminus C} |G| \,\mathrm{d}M. \tag{8.5.1}$$

实际上, 可以选取充分大的紧致圆盘区域, 使其为局部凸或局部凹的 (见引理 8.3.1), 对其边界作形变后得到的光滑紧致圆盘 C 也是局部凸或局部凹的. 由于 $|\lambda(\partial C)| = |2\pi - c(C)| = |c(M\setminus C)| \leqslant \int_{M\setminus C} |G| \,\mathrm{d}M$, 故 C 即为所求.

由定理 6.1.3 可知, 对充分大的 $R>0$, 到 C 的距离函数在 $M\setminus B(C,R)$ 中不存在临界点. 因此由引理 4.4.3, 对任意两个满足 $R\leqslant r_1<r_2$ 的数 r_1 和 r_2, 圆环 $A(C,r_1,r_2)$ 同胚于 $S^1\times[r_1,r_2]$. 记 $K_n := \overline{B(C,R)}$, $N := \overline{M\setminus C}$, 且 $pr:\tilde{N}\longrightarrow N$ 为万有覆盖. 选取在 M 中且在 K_n 之外的任意恰当完备测地线 γ, 和 γ 在 $\tilde{N}$ 中的提升 $\tilde{\gamma}$. 由于 γ 是恰当的, 故函数 $\mathbb{R}\ni t\mapsto d(\gamma(t),C)=d(\tilde{\gamma}(t),\partial\tilde{N})$ 在某个 $t_{\min}$ 处取到最小值. 设 σ 为 M 中从 C 出发的射线 (即对任意 $s>0$, $d(\sigma(s),C)=s$), 且对 $i\in\mathbb{Z}$, 设 σ^i 为 σ 在 $\tilde{N}$ 中的提升, 使得 $\cdots<\sigma^{-1}<\sigma^0<\sigma^1<\cdots$ 且 $\tilde{\gamma}(t_{\min})\in D(\sigma^0,\sigma^1)$. 其中对 $i<j$, $D(\sigma^i,\sigma^j)$ 表示由 σ^i, σ^j 和 $\partial\tilde{N}$ 的从 $\sigma^i(0)$ 到 $\sigma^j(0)$ 的子弧段围成的 $\tilde{N}$ 中的黎曼半平面. 对 $t\in\mathbb{R}$, 记 σ_t 为从 $\partial\tilde{N}$ 到 $\tilde{\gamma}(t)$ 的极小线段. 设 $\partial\tilde{N}:=\mathbb{R}\longrightarrow\partial\tilde{N}$ 为关于 $\tilde{N}$ 的定向的正参数化表示, 记 $s(t):=\partial\tilde{N}^{-1}(\sigma_t(0))$. 由第一变分公式得, 对任意的 $t\in\mathbb{R}$,

$$\angle(\dot{\sigma}_t(0),\partial\dot{\tilde{N}}(s(t)))=\angle(\dot{\sigma}_{t_{\min}}(L(\sigma_{t_{\min}})),\dot{\gamma}(t_{\min}))=\frac{\pi}{2},$$

其中 $L(\cdot)$ 表示曲线的长度; 注意在 $t_{\min}$ 附近 $s(t)$ 关于 t 严格单调. 如若需要, 取 γ 的反向参数表示, 可以假设 $s(t)$ 在 $t_{\min}$ 附近关于 t 单调递增. 记从 $\partial\tilde{N}$ 到 $\tilde{\gamma}(t)$ 的两条极小线段 σ_t^- 和 σ_t^+ 为

$$\sigma_t^-(0)=\partial\tilde{N}(\min\{s\in\mathbb{R};\partial\tilde{N}(s)\ \text{是}\ \partial\tilde{N}\ \text{上}\ \tilde{\gamma}(t)\ \text{的支点}\}),$$
$$\sigma_t^+(0)=\partial\tilde{N}(\max\{s\in\mathbb{R};\partial\tilde{N}(s)\ \text{是}\ \partial\tilde{N}\ \text{上}\ \tilde{\gamma}(t)\ \text{的支点}\}).$$

设 I_t 为 $\partial\tilde{N}$ 的从 $\sigma_t^-(0)$ 到 $\sigma_t^+(0)$ 的子弧段, D_t 为 σ_t^-, σ_t^+ 和 I_t 围成的区域 (见图 8.5.1). 由 Gauss-Bonnet 定理得

$$c(D_t)=\angle_{\tilde{\gamma}(t)}D_t-\lambda(I_t).$$

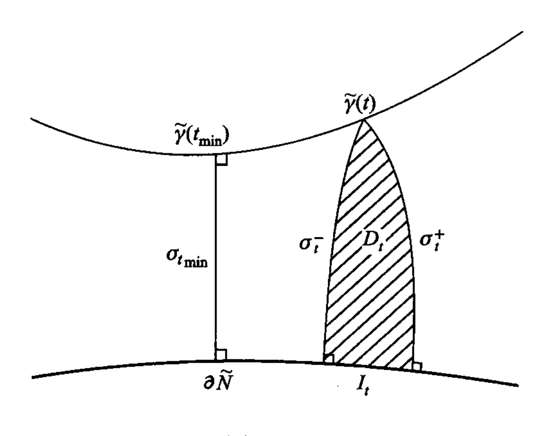


图 8.5.1

由于对某个 i, D_t 包含在 $D(\sigma^i,\sigma^{i+1})$ 中, 并且由 (8.5.1) 可知 $|\,c(D_t)\,|, |\,\lambda(I_t)\,| \leqslant \int_{M\setminus C} |\,G\,|\,\mathrm{d}M$. 因此

$$\angle_{\tilde{\gamma}(t)} D_t \leqslant 2\int_{M\setminus C} |\,G\,|\,\mathrm{d}M < \frac{1}{50}. \tag{8.5.2}$$

记 J_t 为 $\partial\tilde{N}$ 的从 $\sigma_{t_{\min}}(0)$ 到 $\sigma_t(0)$ 的子弧段. 对某个 $t > t_{\min}$, 若 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)}$ 不与 σ_t 相交, 则四段弧 $\sigma_{t_{\min}}, J_t, \sigma_t$ 和 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t]}$ 围成了圆盘区域 E_t. 注意若 t 充分接近 $t_{\min}$, 则 E_t 有定义. 对任意使得 E_t 有定义的 $t > t_{\min}$, 有

$$c(E_t) = \angle_{\tilde{\gamma}(t)} E_t - \frac{\pi}{2} - \lambda(J_t).$$

因此, 若 E_t 包含于 $D(\sigma^0,\sigma^n)$ 中, 则

$$\left|\angle_{\tilde{\gamma}(t)} E_t - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant 2n\int_{M\setminus C} |\,G\,|\,\mathrm{d}M < \frac{1}{50}. \tag{8.5.3}$$

接下来我们证明:

子引理 8.5.1 若对某个 $t > t_{\min}$, $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)}$ 完全包含在 $D(\sigma^0,\sigma^n)$ 中, 则 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)}$ 不与 σ_t 相交.

证明 采用反证法. 假设相反的结论成立, 记

$$t_0 := \inf\{t > t_{\min}; \tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)} \subset D(\sigma^0,\sigma^n), \tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)} \bigcap \sigma_t \neq \varnothing\},$$

我们有 $t_{\min} < t_0 < +\infty$. 则由 (8.5.2) 和 (8.5.3) 可知 $s(t)$ 在 $t \in [t_{\min}, t_0)$ 严格单调递增. 由于对任意 $t \in (t_{\min}, t_0)$, σ_t 不与 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)}$ 相交, 故 $\sigma_{t_0}^- = \lim\limits_{t\nearrow t_0} \sigma_t$ 不

与 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t_0)}$ 相交. 然而, 存在序列 $\{t_i \searrow t_0\}_{i\geqslant 1}$, 使得对任意的 $i \geqslant 1$, $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t_i)}$ 与 σ_{t_i} 相交. 由于任一满足 $\tilde{\gamma}(s_i) \in \sigma_{t_i}, s_i \in [t_{\min}, t_i)$ 的序列 $\{s_i\}$ 在 t_0 处不可加, 故 $\{\sigma_{t_i}\}$ 的极限极小测地线 τ 与 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t_0)}$ 相交, 且满足 $\partial\tilde{N}^{-1}(\sigma_{t_0}^{-1}(0)) < \partial\tilde{N}^{-1}(\tau(0))$. 设 $\tilde{\gamma}(a), t_{\min} \leqslant a < t_0$ 为 $\tau\bigcap\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t_0)}$ 中的点, 则必有 $s(a) = \partial\tilde{N}^{-1}(\tau(0))$, 这与 $[t_{\min}, t_0) \ni t \mapsto s(t)$ 的单调性矛盾. 于是便证明了子引理 8.5.1. 证毕.

记 $t_+ := \sup\{t > t_{\min}; \tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t)} \subset D(\sigma^0, \sigma^n)\}$. 由子引理 8.5.1 可知 $[t_{\min}, t_+) \ni t \mapsto s(t)$ 为严格单调递增函数, 且 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},t_+)}$ 是简单的. 接下来证明:

子引理 8.5.2 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},+\infty)}$ 与 σ^n 相交.

证明 采用反证法. 假设相反的结论成立, 则 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},+\infty)}$ 包含在 $D(\sigma^0, \sigma^n)$ 中. 记 H 为黎曼半平面, 它由 $\tilde{\gamma}\,|_{[t_{\min},+\infty)}, \sigma_{t_{\min}}, \partial\tilde{N}$ 的从 $\sigma_{t_{\min}}(0)$ 到 $\sigma^n(0)$ 的子弧段和 σ^n 围成; 见图 8.5.2. 由于 $H \subset D(\sigma^0, \sigma^n)$, 故有 $c(H) \geqslant -n\displaystyle\int_{M\setminus C} |\,G\,|\,\mathrm{d}M$. 而

$$\lambda(\partial H) \geqslant \frac{3\pi}{2} - n\lambda_{\mathrm{abs}}(\partial C),$$

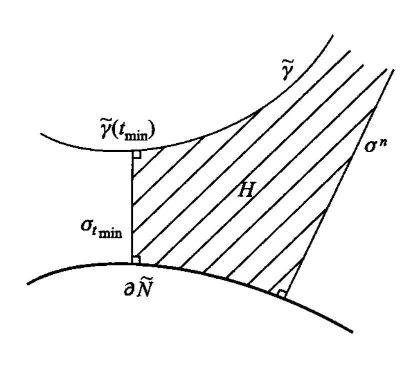


图 8.5.2

结合 $\lambda_\infty(H) \geqslant 0$ 可得

$$c(H) = \pi - \lambda_\infty(H) - \lambda(\partial H) \leqslant -\frac{\pi}{2} + n\int_{M\setminus C} |\,G\,|\,\mathrm{d}M.$$

矛盾. 证毕.

采用与以上相同的方法, 可以证明 $\tilde{\gamma}\,|_{(-\infty,t_{\min}]}$ 与 σ^{-n-1} 相交. 记 $t_- := \inf\{t < t_{\min}; \tilde{\gamma}\,|_{(t,t_{\min}]} \subset D(\sigma^{-n-1}, \sigma^1)\}$, 设 $t_{\max}$ 是使得函数 $[t_-, t_+] \ni t \mapsto d(\tilde{\gamma}(t), \partial\tilde{N})$ 取得最大值的一个 t 值. 记 $r_{\min} := d(\gamma(t_{\min}), C)$, $r_{\max} := d(\gamma(t_{\max}), C)$. 因为 $A(C, r_{\max}, r_{\min})$ 同胚于 $S^1 \times [r_{\max}, r_{\min}]$, 所以若 $t_{\max} \leqslant t_{\min}$, 则 $\gamma\,|_{[t_{\min},t_+]}$

与 $\gamma|_{[t_{\max},t_{\min}]}$ 的交点个数至少为 n, 且 $\mathrm{rot}(\gamma|_{[t_-,t_+]}) \geqslant n$. 当 $t_{\max} > t_{\min}$ 时, 同样有 $\mathrm{rot}(\gamma|_{[t_-,t_+]}) \geqslant n$. 证毕.

§6 任意接近无穷处完备测地线的存在性

定理 8.2.6(1) 的证明 假设存在完备测地线的序列 $\{\gamma_i\}$ 趋向于无穷. 由定理 8.3.3, 对每个充分大的 i, γ_i 为半正则的. 与半正则 γ_i 相对应的泪珠形族是局部凸填充, 故 M 不可缩. 证毕.

本节的主要目的是证明定理 8.2.6 的 (2).

引理 8.6.1 若 $c(M) > \pi$, 则对 M 的任一紧致子集 K, 存在简单测地回路, 它所围成的圆盘区域包含 K.

证明 取定正数 ϵ, 使得 $5\epsilon < c(M) - \pi$ 且 $\epsilon < \pi/2$. 选取 M 的柱心 C_ϵ, 使得 $\displaystyle\int_{M\setminus C_\epsilon} |G|\,\mathrm{d}M \leqslant \epsilon$, 且 C_ϵ 包含给定的 M 的紧致子集 K. 则对从 C_ϵ 出发的射线 σ, 有 $\lambda_\infty(D(\sigma^0,\sigma^1)) = 2\pi - c(M) < \pi - 5\epsilon$. 应用引理 3.7.2 可知存在 $T > 0$, 和 $D(\sigma^0,\sigma^1)$ 中连接 $\sigma^0(T)$ 和 $\sigma^1(T)$ 的极小线段 γ_T, 使其不与 ∂C_ϵ 相交 (特别地, γ_T 是测地线段). γ_T 到 $M\setminus C_\epsilon$ 的投影是以 $\sigma(T)$ 为基点的简单测地回路, 它围成了包含 K 的圆盘区域. 证毕.

以下的引理是定理 8.2.6(2) 的一部分.

引理 8.6.2 若 M 为扩张的且 $c(M) > \pi$, 则对 M 的任意紧致子集 K, 存在 M 中且在 K 之外的完备测地线.

证明 设 K 为给定的 M 的紧致子集. 由于 M 是扩张的, 由定理 8.3.1 的 (1), 存在 M 的紧致可缩子集 K', 使得 K' 的内部 $\mathrm{int}\, K'$ 包含 K, 且 $\mathrm{int}\, K$ 之外的任意测地弧为半正则的. 由引理 8.6.1, 存在简单测地回路 γ, 它围成了包含 K' 的圆盘区域 D. 由于 D 不是局部凹的, 故其为泪珠形. 设 γ' 为满足 $\gamma \subset \gamma' \subset M\setminus \mathrm{int}\, K'$ 的最大测地线, 则由于 γ' 是半正则的, 故 $\gamma'\setminus\gamma$ 不与 D 相交, 因此 γ' 是 M 中不与 K 相交的完备测地线. 证毕.

定义 8.6.1 (可视像与直径) 对于点 $p \in M$ 和子集 $A \subset M$, 记

$$\Gamma_p^+(A) := \{v \in S_pM; 对某个\ t \geqslant 0,\ \exp_p tv \in A\}.$$

称 $\Gamma_p^+(A)$ 为 A 在 p 点的可视像. A 在 p 点的可视直径定义为 $\Gamma_p(A)$ 关于 S_pM 上的标准角 - 距离函数的直径.

若 A 是给定的 M 的闭子集, 则可视直径 $\mathrm{diam}\ \Gamma_p^+(K)$ 在 $p \in M$ 处上半连续.

定理 8.6.1 设 M 为可能具有边界的有限连通完备 2 维黎曼流形, 设 C 为 M 的柱心. 若 $\overline{M \setminus C}$ 的分支 V 满足 $\lambda_\infty(V) > 0$, 则当 $p \in V$ 趋向于 V 的端时, 可视直径 $\mathrm{diam}\ \Gamma_p^+(C) \to 0$.

证明 因为 C 是紧致的, 故可视像 $\Gamma_p(C)$ 也是紧致的. 因此存在两个向量 $u_p, v_p \in \Gamma_p(C)$, 使得 $\angle(u_p, v_p) = \mathrm{diam}\ \Gamma_p(C)$. 选取从 C 出发的射线 σ 的提升 $\tilde{u}_p, \tilde{v}_p \in S_{\tilde{p}}\tilde{V}$, $\tilde{p} \in D(\sigma^0, \sigma^1)$. 对从 $\tilde{p}$ 出发的任意测地线段 γ 应用引理 3.3.2, 可知对某些不依赖于 p 和 γ 的 $m < 0$ 和 $n > 1$, γ 包含在 $D(\sigma^n, \sigma^m) \setminus (\sigma^n \bigcup \sigma^m)$ 中. 因为 $u, v \in \Gamma_p(C)$, 故从 $\tilde{p}$ 出发的分别以 $u_{\tilde{p}}$ 和 $v_{\tilde{p}}$ 为方向的两条测地线 α_p 和 β_p 都包含在 $D(\sigma^m, \sigma^n)$ 中, 且连接 $\tilde{p}$ 与 $I(\sigma^m, \sigma^n) = \partial\tilde{V} \bigcap D(\sigma^m, \sigma^n)$. 正如命题 3.2.3 的证明, 我们选取连接 $\tilde{p}' \in \partial\Delta(\alpha_p \bigcup \beta_p)$ 和 $I(\sigma^m, \sigma^n)$ 的两条曲线 α_p' 和 β_p'. 由引理 3.2.2 可知, 若 p 充分接近无穷, 则 $\tilde{p}' = \tilde{p}$, 且当 $p \to \infty$ 时 $\angle(u_p, v_p) \to 0$. 证毕.

由定理 8.6.1 可知:

推论 8.6.1 若黎曼平面 M 满足 $c(M) < 2\pi$, 则对 M 的任意紧致子集 K, 存在 $R > 0$, 使得经过任意点 $p \in M \setminus B(K, R)$ 都有一条 K 之外的完备测地线.

定理 8.2.6(2) 的证明 由引理 8.6.2 和推论 8.6.1 可得定理的结论. 证毕.

记 Γ 为单位速度测地线 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ 的集合. 存在具有 Sasaki 度量的单位切丛 SM 上的标准 Lebesgue 测度 (见例 1.3.2). 对每个 $v \in SM$, 由单位切丛 SM 到 Γ 的双射给出了 $\gamma_v \in \Gamma$, 其中 $\gamma_v(t) := \exp tv, t \in \mathbb{R}$. 这一双射诱导了 Γ 上的测度 m. 设 M 的紧致子集 C 具有非零体积. 在集合 $\Gamma_C := \{\gamma \in \Gamma; \gamma(0) \in C\}$ 上, 自然地定义概率测度 prob_{Γ_C} 为

$$\mathrm{prob}_{\Gamma_C} A := \frac{m(A)}{m(\Gamma_C)},$$

其中可测集 $A \subset \Gamma_C$. 对于 M 的可测子集 K, 记

$$E(K) := \{\gamma \in \Gamma; \gamma \bigcap K \neq \varnothing\}.$$

则 $E(K) \bigcap \Gamma_C$ 是关于概率空间 $(\Gamma_C, \mathrm{prob}_{\Gamma_C})$ 的概率事件. 用半测地线 $\gamma : [0, +\infty) \longrightarrow M$ 的集合 Γ^+ 代替 Γ, 用相同的方法可以定义 Γ_C^+, $\mathrm{prob}_{\Gamma_C^+}$ 和 $E^+(K)$.

推论 8.6.2 设黎曼平面 M 满足 $c(M) < 2\pi$, 设 K 为 M 的紧致子集, 且 M 的紧致子集序列 $\{C_i\}$ 具有非零体积, 并且使得 $\bigcup_i C_i = M$. 记 $\Gamma_i := \Gamma_{C_i}$, $\Gamma_i^+ := \Gamma_{C_i}^+$, 则有

$$\lim_{i \to \infty} \mathrm{prob}_{\Gamma_i}(E(K) \bigcap \Gamma_i) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K) \bigcap \Gamma_i^+) = 0.$$

证明　取定 $\epsilon > 0$. 由定理 8.6.1, 存在 M 的紧致子集 C_ϵ, 使得对任意的 $p \in M \setminus C_\epsilon$, $\operatorname{diam} \Gamma_p^+(K) < \epsilon$. 因此对每个 i,

$$\operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K) \bigcap \Gamma_i^+ \setminus \Gamma_{C_\epsilon}^+) < \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

所以有

$$\begin{aligned}\operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+) = & \frac{m(\Gamma_{C_\epsilon}^+)}{m(\Gamma_i^+)}\operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+\bigcap\Gamma_{C_\epsilon}^+) \\ & + \frac{m(\Gamma_i^+ \setminus \Gamma_{C_\epsilon}^+)}{m(\Gamma_i^+)}\operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+ \setminus \Gamma_{C_\epsilon}^+).\end{aligned}$$

由定理 5.2.1 可知 M 具有无穷体积, 因而当 $i \to \infty$ 时 $m(\Gamma_i^+)$ 趋向于无穷. 因此有

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+ \setminus \Gamma_{C_\epsilon}^+) \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

证毕.

猜想 8.6.1　设黎曼平面 M 满足 $c(M) = 2\pi$. 则有

$$\liminf_{M \ni p\to\infty} \mu(\Gamma_p^+(K)) \geqslant \pi,$$

其中 μ 表示 S_pM 上的标准 Lebesgue 测度, 且 $M \ni p \to \infty$ 表示 $p \in M$ 和 M 中取定一点之间的距离趋向于无穷. 若 M 又是扩张的, 则

$$\lim_{p\to\infty} \mu(\Gamma_p^+(K)) = \pi.$$

若猜想的结论成立, 则正如推论 8.6.2 的证明所述, 采用相同的方法我们将得到以下结论. 采用推论 8.6.2 中相同的记号, 若黎曼平面 M 满足 $c(M) = 2\pi$, 则

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{prob}_{\Gamma_i}(E(K)\bigcap\Gamma_i) = 1,$$

$$\liminf_{i\to\infty} \operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+) \geqslant \frac{1}{2}.$$

若 M 又是扩张的, 则

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{prob}_{\Gamma_i^+}(E^+(K)\bigcap\Gamma_i^+) = \frac{1}{2}.$$

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, A theorem on triangles in a metric space and some of its applications, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **38** (1951), 5-23.

[2] *Die Innere Geometrie der Konvexen Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1955.

[3] Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie, *Schriften Forschungsinst. Math.* **1** (1957), 33-84.

[4] A. D. Alexandrov, V. N. Berestovskii and I. G. Nikolaev, Generalized Riemannian spaces, *Russian Math. Surveys* **41** (1986), no. 3, 1-54.

[5] A. D. Alexandrov and V. A. Zalgaller, Two-dimensional manifolds of bounded curvature, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **63** (1962), 33-84.

[6] *Intrinsic Geometry of Surfaces*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967.

[7] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Progress in Math., vol. 61, Birkhäuser, Boston-Basel Stuttgart, 1985.

[8] S. Banach, Sur les linges rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fundamenta Mathematicae* **7** (1925), 225-236.

[9] V. Bangert, Geodesics and totally convex sets on surfaces, *Invent. Math.* **63** (1981), 507-517.

[10] On the existence of escaping geodesics, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), 59-65.

[11] Yu. D. Burago, Closure of the class of manifolds of bounded curvature, *Proc. Steklov Inst. Math.* **76** (1967), 175-183.

[12] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, 1955.

[13] *Convex Surfaces*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 6, Interscience Publishers, New York, London, 1958.

[14] M. Cassorla, Approximating compact inner metric spaces by surfaces, *Indiana Univ. Math. J.* **41** (1992), 505-513.

[15] J. Cheeger, Critical points of distance functions and applications to geometry, in *Geometric Topology: Recent Developments*, Lecture Notes in Math., no. 1504, Springer-Verlag, 1991, pp. 1-38.

[16] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Mathematical Library, vol. 9, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[17] J. Cheeger and D. Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, *Ann. Math. (2)* **96** (1972), 413-443.

[18] X. Chen, Weak limits of Riemannian metrics in surfaces with integral curvature bound, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **6** (1998), no. 3, 189-226.

[19] S. Cohn-Vossen, Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen, *Compositio Math.* **2** (1935), 63-113.

[20] Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden offenen volständigen Flächenstücken, *Recueil Math. Moscow* **43** (1936), 139-163.

[21] P. Eberlein and B. O'Neill, Visibility manifolds, *Pacific J. Math.* **46** (1973), 45-109.

[22] D. Elerath, An improved Toponogov comparison theorem for non-negatively curved manifolds, *J. Differential Geom.* **15** (1980), 187-216.

[23] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[24] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1985.

[25] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, 1969.

[26] F. Fiala, Le problème isopérimetres sur les surfaces ouvertes à courbure positive, *Comment. Math. Helv.* **13** (1941), 293-346.

[27] H. Gluck and D. Singer, Scattering of geodesic fields. I, *Ann. Math. (2)* **108** (1978), no. 2, 347-372.

[28] Scattering of geodesic fields. II, *Ann. Math. (2)* **110** (1979), no. 2, 205-225.

[29] D. Gromoll, W. Klingenberg and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Lecture Notes in Math., vol. 55, Springer-Verlag, 1968.

[30] D. Gromoll and W. Meyer, On complete manifolds of positive curvature, *Ann. Math. (2)* **75** (1969), 75-90.

[31] M. Gromov, *Volume and Bounded Cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1982), no. 56, 5-99 (1983).

[32] *Metric Structures for Riemannian and non- Riemannian Spaces*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original (MR 85e: 53051), with appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; translated from the French by Sean Michael Bates.

[33] R. Gulliver, On the variety of manifolds without conjugate points, *Trans. Amer. Math. Soc.* **210** (1975), 185-201.

[34] P. Hartman, Geodesic parallel coordinates in the large, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 705-727.

[35] J. J. Hebda, Parallel translation of curvature along geodesics, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299** (1987), no. 2, 559-572.

[36] Metric structure of cut loci in surfaces and Ambrose's problem, *J. Differential Geom.* **40** (1994), no. 3, 621-642.

[37] E. Heintze and H.-C. Imhof, Geometry of horospheres, *J. Differential Geom.* **12** (1977), no. 4, 481-491.

[38] H. Hopf and W. Rinow, Über den Begriff der volständigen differentialgeometrischen Fläche, *Comment. Math. Helv.* **3** (1931), 209-225.

[39] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.* **32** (1952), 13-72.

[40] M. Igarashi, K. Kiyohara and K. Sugahara, Noncompact Liouville surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **45** (1993), 459-480.

[41] J. Itoh, The length of a cut locus on a surface and Ambrose's problem, *J. Differential Geom.* **43** (1996), 642-651.

[42] A. Kasue, A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **21** (1988), no. 4, 593-622.

[43] A convergence theorem for Riemannian manifolds and some applications, *Nagoya Math. J.* **114** (1989), 21-51.

[44] K. Kiyohara, Compact Liouville surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **43** (1991), 555-591.

[45] Y. Kubo and V. K. Senanayake, The Busemann total excess of complete open Alexandrov surfaces, *Kyushu J. Math.* **49** (1995), no. 1, 135-142.

[46] D. P. Ling, Geodesics on surfaces of revolution, *Trans. Amer. Math. Soc.* **59** (1946), 415-429.

[47] Y. Machigashira, The Gaussian curvature of Alexandrov surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **50** (1998), no. 4, 859-878.

[48] Y. Machigashira and F. Ohtsuka, Total excess on length surfaces, Math. Ann. **319** (2001), 675-706.

[49] M. Maeda, On the existence of the rays, *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I* (1979), no. 26, 1-4.

[50] Remarks on the distribution of rays, *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I* (1981), no. 28, 15-21.

[51] A geometric significance of total curvature on complete open surfaces, in *Geometry of Geodesics and Related Topics (Tokyo, 1982)*, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 451-458.

[52] A note on the set of points which are poles, *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I* (1985), no. 32, 1-5.

[53] On the total curvature of noncompact Riemannian manifolds. II, *Yokohama Math. J.* **33** (1985), no. 1-2, 93-101.

[54] A note on the geodesic circles and total curvature, *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I* (1988), no. 35, 1-9.

[55] Geodesic circles and total curvature, *Yokohama Math. J.* **36** (1989), no. 2, 91-103.

[56] Geodesic spheres and poles, in *Geometry of Manifolds (Matsumoto, 1988)*, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 281-293.

[57] On the diameter of geodesic circles, *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I* (1989), no. 36, 1-5.

[58] Geodesic sphere and poles. II, *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I* (1990), no. 37, 19-23.

[59] H. von Mangoldt, Über die jenigen Punkte auf positive gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhöven, pürzeste Linien zu sein, *J. Reine Angew. Math.* **91** (1881), 23-53.

[60] S. B. Myers, Connections between differential geometry and topology I, *Duke Math. J.* **1** (1935), 376-391.

[61] Connections between differential geometry and topology II, *Duke Math. J.* **2** (1935), 95-102.

[62] T. Oguchi, Total curvature and measure of rays, *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.* **21** (1986), 1-4.

[63] F. Ohtsuka, On a relation between total curvature and Tits metric, *Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A* (1988), no. 20, 5-8.

[64] On the existence of a straight line, *Tsukuba J. Math.* **12** (1988), no. 1, 269-272.

[65] P. Petersen, S. D. Scheingold, and G. Wei, Comparison geometry with integral curvature bounds, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 6, 1011-1030.

[66] P. Petersen and C. Sprouse, Integral curvature bounds, distance estimates and applications, *J. Differential Geom.* **50** (1998), no. 2, 269-298.

[67] P. Petersen and G. Wei, Relative volume comparison with integral curvature bounds, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 6, 1031-1045.

[68] H. Poincaré, Sur les linges gésiques de surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), 237-274.

[69] W. Poor, Some results on nonnegatively curved manifolds, *J. Differential Geom.* **9** (1974), 583-600.

[70] Yu. G. Reshetnyak (ed.), *Geometry IV, Encyclopaedia of Math. Sci.*, vol. 70, Springer-Verlag, 1993.

[71] Two-dimensional manifolds of bounded curvature, in *Encyclopaedia of Math. Sci.*, vol. 70, 1993, pp. 3-163.

[72] G. de Rham, Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, *Comment. Math. Helv.* **26** (1952), 341.

[73] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Mathematical Monographs, vol. 149, Amer. Math. Soc., 1992.

[74] V. K. Senanayake, The existence of geodesic loops on Alexandrov surfaces, *Nihonkai Math. J.* **8** (1997), no. 1, 95-100.

[75] Mass of rays on Alexandrov surfaces, *Kyushu J. Math.* **54** (2000), no. 1, 139-146.

[76] K. Shiga, On a relation between the total curvature and the measure of rays, *Tsukuba J. Math.* **6** (1982), no. 1, 41-50.

[77] A relation between the total curvature and the measure of rays. II, *Tôhoku Math. J. (2)* **36** (1984), no. 1, 149-157.

[78] K. Shiohama, Busemann function and total curvature, *Invent. Math.* **53** (1979), 281-297.

[79] The role of total curvature on complete noncompact Riemannian 2-manifolds, *Illinois J. Math.* **28** (1984), 597-620.

[80] Topology of complete noncompact manifolds, in *Geometry of Geodesics and Related Topics (Tokyo, 1982)*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 423-450.

[81] Cut locus and parallel circles of a closed curve on a Riemannian plane admitting total curvature, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), 125-138.

[82] Total curvatures and minimal areas of complete open surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94** (1985), 310-316.

[83] An integral formula for the measure of rays on complete open surfaces, *J. Differential Geom.* **23** (1986), 197-205.

[84] K. Shiohama, T. Shioya and M. Tanaka, Mass of rays on complete open surfaces, *Pacific J. Math.* **143** (1990), no. 2, 349-358.

[85] K. Shiohama and M. Tanaka, An isoperimetric problem for infinitely connected complete open surfaces, in *Geometry of Manifolds (Matsumoto, 1988)*, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 317-343.

[86] The length function of geodesic parallel circles, in *Progress in Differential Geometry*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993, pp. 299-308.

[87] Cut loci and distance spheres on Alexandrov surfaces, in *Actes de la table ronde de géométrie différentielle (Luminy, 1992)*, Soc. Math. France, Paris, 1996, pp. 531-559.

[88] T. Shioya, The ideal boundaries of complete open surfaces admitting total curvature $c(M) = -\infty$, in *Geometry of Manifolds (Matsumoto, 1988)*, Perspect. Math., vol. 8, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 351-364.

[89] The ideal boundaries and global geometric properties of complete open surfaces, *Nagoya Math. J.* **120** (1990), 181-204.

[90] On asymptotic behavior of the mass of rays, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), no. 2, 495-505.

[91] The ideal boundaries of complete open surfaces, *Tôhoku Math. J. (2)* **43** (1991), no. 1, 37-59.

[92] Diameter and area estimates for S^2 and P^2 with non-negatively curved metrics, in *Progress in Differential Geometry*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 22, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993, pp. 309-319.

[93] Behavior of distant maximal geodesics in finitely connected complete 2-dimensional Riemannian manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **108** (1994), no. 517.

[94] Mass of rays in Alexandrov spaces of nonnegative curvature, *Comment. Math. Helv.* **69** (1994), no. 2, 208-228.

[95] Geometry of total curvature, in *Actes de la table ronde de géométrie différentielle (Luminy, 1992)*, Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, pp. 561-600.

[96] The Gromov-Hausdroff limits of two-dimensional manifolds under integral curvature bound, in *Geometry and Topology* (Y. W. Kim, S. E. Koh, Y. J. Song and Y. G. Choi, eds.), *Proceedings of Workshop in Pure Mathematics*, vol. 16, Part III, Pure Mathematics Research Association, Korean Academic Council, 1996, pp. 35-55.

[97] The limit spaces of two-dimensional manifolds with uniformly bounded integral curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), no. 5, 1765-1801.

[98] Behavior of distant maximal geodesics in finitely connected 2-dimensional Riemannian manifolds II, to appear in *Geom. Dedicata.*

[99] T. Shioya and T. Yamaguchi, Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound, *J. Differential Geom.* **56** (2000), no. 1, 1-66.

[100] K. Sugahara, On the poles of Riemannian manifolds of nonnegative curvature, in *Progress in Differential Geometry*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 22 (1993), pp. 321-332.

[101] M. Tanaka, On a characterization of a surface of revolution with many poles, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **46** (1992), no. 2, 251-268.

[102] On the cut loci of a von Mangoldt's surface of revolution, *J. Math. Soc. Japan* **44** (1992), no. 4. 631-641.

[103] V. A. Toponogov, Riemannian spaces containing straight lines, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **127** (1959), 977-979.

[104] Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* **37** (1964), 291-336.

[105] M . Trojanov, Un principle de concentration-compacité pour les suites de surfaces riemaniennes, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **8** (1991), no. 5, 1-23.

[106] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1977.

[107] J. H. C. Whitehead, On the covering of a complete space by the geodesics through a point, *Ann. Math. (2)* **36** (1935), 679-704.

[108] J. H. C. Whitehead, Convex regions in the geometry of paths, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **3** (1932), 33-42.

[109] H. Whitney, On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.* **4** (1937), 276-284.

[110] D. Yang, Convergence of Riemannian manifolds with integral bounds on curvature I, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **25** (1992), 77-105.

索引

W

X

Y

Z

本书系统地介绍了2维完备非紧致黎曼流形上全曲率的几何，其中包括黎曼几何预备知识， Cohn-Vossen定理， Huber定理，理想边界，割迹的结构，等周不等式，射线的质量，极点和割迹，测地线的性态等内容。书中介绍并推广了许多经典的几何结果。通过研究射线的Busemann函数，讨论了完备开曲面的紧化问题。

作者在每一章中都提出了一些值得考虑的尚未解决的问题，并且加入了许多插图以加深读者对内容的直观理解。

本书假定读者已经掌握了微分几何的基础知识，可供大学数学系高年级本科生、研究生以及对现代微分几何感兴趣的数学工作者阅读和使用。


ISBN 978-7-04-027489-9

定价 42.00 元

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
www.cambridge.org

■ 学科类别：数学

网址：academic.hep